Fem un breu recorregut relacionant equacions fonamentals d'ones i partícules unificant-ne la descripció amb principis variacionals i mostrem dos exemples de sistemes continus d'especial rellevància per la seua relació amb els potencials de Coulomb i Yukawa i, per tant, amb els bosons sense massa (fotons) o massius (Z, W) amb què estan relacionats

Unificant la descripció d'ones i partícules amb principis variacionals

Josep Planelles

Comencem recordant la llei de Snell. La figura 1 mostra un feix de llum que transita entre dos medis.

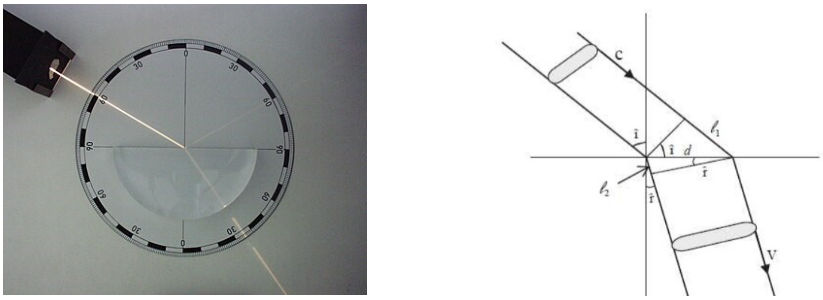

Figura 1: (esquerra) Feix làser que transita entre dos medis (dreta) esquema del feix làser

El feix d'ones avança en el medi superior. En trobar-se amb la interfase canvia de medi, és a dir, canvia l'índex de refracció $n = \frac{c}{v}$, on c és la velocitat de la llum en el buit i v la velocitat en el medi considerat. Com el feix no sofreix interferències destructives vol dir que conserva la fase, per tant, com mostra l'esquema de la dreta de la figura 1, el front d'ones avança un espai ℓ_1 en el medi superior a la velocitat v_1 en el mateix temps que avança un espai ℓ_2 en el medi inferior a la velocitat v_2: $\frac{\ell_1}{v_1} = \frac{\ell_2}{v_2}$. Per tant, de la figura:

$$\frac{d \sin \hat{\imath}}{c/n_1} = \frac{d \sin \hat{r}}{c/n_2} \Rightarrow \boxed{n_1 \sin \hat{\imath} = n_2 \sin \hat{r}} \quad \mathit{Llei\ de\ Snell} \qquad (1)$$

Aquesta llei pot ser derivada del principi de Fermat que afirma que *el camí que recorre un raig de llum entre dos punts fixos és aquell en que el temps de recórrer-lo és mínim*[1]: $\boxed{\delta \int_{O_1}^{O_2} n ds = 0}$.

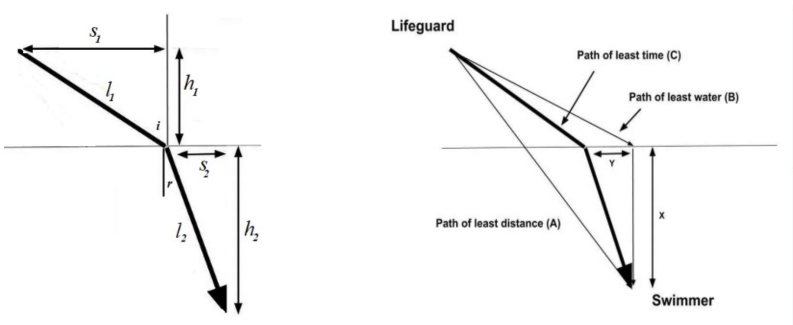

Figura 2 (esquerra) esquema del feix làser anterior (dreta) Esquema del camí òptim que ha de seguir el socorrista

En efecte, en la figura 2 (part esquerra), si diem $S = s_1 + s_2$, tenim que el temps total que tarda la llum en recórrer el camí és:

$$t(s_1) = \frac{\ell_1}{v_1} + \frac{\ell_2}{v_2} = \frac{\sqrt{s_1^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(S - s_1)^2 + h_2^2}}{v_2} \qquad (2)$$

El valor s_1 que fa mínim el temps és aquell en que $dt(s_1)/ds_1 = 0$, aleshores, derivant l'eq. 2 trobem: $\frac{dt(s_1)}{ds_1} = 0 = \frac{s_1}{\ell_1 v_1} - \frac{s_2}{\ell_2 v_2} \Rightarrow \frac{Sin\ \hat{\imath}}{v_1} - \frac{Sin\ \hat{r}}{v_2}$ que multiplicant per c els dos membres ens retorna la llei de Snell, eq. (1).

---

[1] Adonem-nos que $\frac{n}{c} ds = \frac{ds}{v} = dt$. Per tant, el que diu aquesta formulació matemàtica del principi és allò que enuncia el principi: que la suma dels temps que se tarda en recórrer el camí és mínim.

El mateix raonament senyala el camí més ràpid que ha de seguir un socorrista per salvar un nadador que s'ofega (dibuix de la dreta en Figura 2). Cal tenir en compte que la velocitat del socorrista en aigua és inferior a la que té en terra.

Aquest camí que fa mínim el temps que empra el socorrista, també fa mínima la mitjana de la seua energia cinètica:

$$\delta \int_{r_1}^{r_2} v(s) ds = 0 = \delta \int_0^\tau v \frac{ds}{dt} dt = \delta \int_0^\tau v^2 \, dt = \frac{2}{m} \delta \int_0^\tau T \, dt \Longrightarrow \boxed{\delta \int_0^\tau T \, dt = 0} \quad (3)$$

Aquest resultat, eq. 3, no és més que l'anomenat principi de Maupertuis que s'enuncia dient que: *en un camp conservatiu, on l'energia total és contant,* $\delta \int_{t_1}^{t_2} p \, ds = 0$*, on* $p = mv$. (que és equivalent a l'eq. 3 atès que $pds = pvdt = 2T$).

El principi de Maupertuis pot ser doncs reescrit en termes de la mitjana de l'energia cinètica, $\bar{T} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T \, dt$. A banda d'energia cinètica, però, també hi ha (o pot haver) energia potencial, la mitjana de la qual és $\bar{V} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau V \, dt$, de manera que la suma $\bar{T} + \bar{V} = \bar{E} = E$ és constant en un sistema conservatiu.

Hem dit que la trajectòria que segueix un mòbil és aquella que fa mínima l'energia cinètica mitjana, de manera en sortir-ne d'eixa trajectòria fa créixer el valor d'aquesta mitjana, per això escrivim que la trajectòria és tal que: $\frac{\delta \bar{T}}{\delta x} = 0$. Ens preguntem: què li passarà mentrestant a $\frac{\delta \bar{V}}{\delta x}$?

Per una banda tenim que:

$$\frac{\delta \bar{T}}{\delta x} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\delta T}{\delta x} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\delta T}{\delta t} \frac{\delta t}{\delta x} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{m}{2} 2\dot{x}\ddot{x} \frac{1}{\dot{x}} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau m\ddot{x} \, dt$$

que és el producte de la massa per l'acceleració. Anàlogament,

$$\frac{\delta \bar{V}}{\delta x} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\delta V}{\delta x} dt = -\frac{1}{\tau} \int_0^\tau F \, dt$$

que és la força amb el signe canviat. Per tant, des de la llei de Newton, $F = m\ddot{x}$, trobem que:

$$0 = \frac{\delta \bar{T}}{\delta x} - \frac{\delta \bar{V}}{\delta x} = \frac{\delta (\bar{T} - \bar{V})}{\delta x} = \frac{1}{\tau} \delta \int_0^\tau \frac{(T - V)}{\delta x} dt$$

Si definim Lagrangiana $L = T - V$ i acció $S = \int_0^\tau L \, dt$, des de l'eq. anterior trobem $\boxed{\frac{\delta S}{\delta x} = 0}$, que és l'anomenat principi de Hamilton de mínima acció el qual s'enuncia dient que: *la trajectòria* $x(t)$ *que recorre una partícula entre dos punts fixos és aquell que fa mínima l'acció:*

$$\boxed{\delta \int_0^\tau L \, dt = 0}. \quad (4)$$

Des del principi de Hamilton, atès que L és funció de posició i velocitat, $L(x, v)$, podem trobar les equacions d'Euler-Lagrange. La figura 3 mostra el camí òptim i dos possibles deformacions.

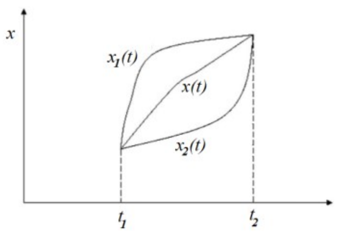

Figura 3 Camí òptim entre dos punts fixos i dues possibles deformacions infinitessimals del camí (exagerades)

En efecte, des del principi de Hamilton:

$$0 = \int_0^\tau (\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial v}\delta v)\, dt$$

amb $\delta v\, dt = \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) dt = d(\delta x)$, on δx representa una petita deformació del camí òptim. Integrant per parts el segon sumand de la integral trobem:

$$\int_0^\tau \frac{\partial L}{\partial v} d(\delta x) = \left[\frac{\partial L}{\partial v}\delta x\right]_0^\tau - \int_0^\tau \delta x \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} dt = -\int_0^\tau \delta x \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} dt,$$

on hem fet zero el claudàtor perquè $\delta x = 0$, tant en el punt inicial com el final del camí, perquè punt inicial i final són punts fixos no deformables, vegeu figura 3. Per tant,

$$0 = \int_0^\tau \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\right] \delta x dt$$

i com δx és arbitrària, necessàriament:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \qquad (5)$$

que són les equacions d'Euler-Lagrange, les quals ens retornen immediatament l'equació de Newton en just injectar-hi $L = \frac{1}{2}mv^2 - V(x)$.

En efecte, per una banda $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = m\, a$, per un altra: $-\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = -F$, per tant, $F = m\, a$.

Finalment, si en lloc d'un sistema discret tenim un sistema continu (com per exemple una corda flexible que podem imaginar com una col·lecció de boles minúscules –àtoms– unides per micro-molls –els enllaços–), és a dir, si tenim un camp en lloc de tenir un únic oscil·lador, aleshores, la coordenada x, que indica la posició l'oscil·lador cal substituir-la pel camp $\phi(x)$ de les posicions atòmiques. Aleshores, podem definir la densitat lagrangiana $\mathcal{L}$ a partir de la lagrangiana total L: $L = \int dx\, \mathcal{L}$ i per tant trobar l'acció, $S = \int dt\, L = \int dt\, dx\, \mathcal{L}$, com una doble integració, on ara les variables de la densitat lagrangiana són el camp i la seua derivada $\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})$ i les equacions d'Euler-Lagrange passen a ser:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0} \qquad (6)$$

Podem abundar en l'exemple de la corda oscil·lant de massa m i longitud ℓ en el cas més simple de forces elàstiques, definir la densitat de massa $\rho = m/\ell$ i anomenar k a la constant de força que genera tensió quan el camp $\phi(x,t)$ se separa de la seua posició d'equilibri (hem inclòs la variable temps perquè la deformació de la corda canvia amb la coordenada però és diferent en canviar el temps).

L'energia cinètica de la corda és: $T = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx\, \rho\, \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2$ i la potencial[2] $V = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx\, k\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2$, de manera que la densitat lagrangiana resulta $\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2$.

[2] En el cas discret $F = -k\Delta x$. En una corda $\delta\mathcal{F} = -k\, \phi' dx$ i la densitat potencial $\mathcal{V} = \frac{1}{2}\, k\, (\phi')^2$.

La minimització $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$ de l'acció $S = \int dt\, L = \int dt\, dx\, \mathcal{L}(\phi, \phi', \dot{\phi})$, on hem explicitat la dependència de la Lagrangiana amb el gradient del camp que apareix en el terme d'energia potencial, resulta: $\int dt\, dx\, \delta\mathcal{L}(\phi, \phi', \dot{\phi}) = 0$.

Si, de manera semblant a com hem fet adés per deduir l'equació (5), tenim en compte que $dt\, dx\, \delta\dot{\phi} = \delta\left(\frac{d\phi}{dt}\right) dt\, dx = d(\delta\phi)\, dx$ i anàlogament $dt\, dx\, \delta\phi' = \delta\left(\frac{d\phi}{dx}\right) dt\, dx = d(\delta\phi)\, dt$, i integrem per parts, tenint en compte que els extrems són punts fixos, trobem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'}\right) = 0 \qquad (7)$$

Substituint $\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{k}{2}\phi'^2$ i derivant resulta: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt}(\rho\dot{\phi}) = \rho\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$, finalment, $\frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} = -\frac{d}{dx}(k\phi') = -k\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$, que substituïts en l'equació (7), previ identificar $v^2 = k/\rho$, dóna lloc a l'equació de D'Alembert de la propagació del moviment ondulatori:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Atès que el camp $\phi(x,t)$ té com coordenades espai i temps, convé escriure la Lagrangiana, així com l'equació (7), sense mostrar preferència sobre cap de les variables del camp, de manera que, per exemple, per al cas $\rho = k = 1$, la lagrangiana simplement s'escriu $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2$ i l'eq. (7) s'escriu: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0$, on el doble índex μ implica suma sobre totes les coordenades.

En el cas d'ones electromagnètiques $v^2 = 1/\varepsilon\mu$, amb ε, μ la constant dielèctrica i permeabilitat magnètica del medi, respectivament. Igualment, $\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2$, que és la velocitat de propagació de la llum a l'espai buit. Aquesta equació presenta solucions $\phi(x,t) = \sum_p a_p\, e^{-i\,(E_p t - p\,x)}$ que tenen dispersió lineal $E_p = c|\boldsymbol{p}|$. Comparant amb la dispersió relativista $E_p = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ diem que aquest camp representa partícules sense massa (en procedir en el tractament quàntic a quantificar l'equació de l'ona electromagnètica apareixen els fotons d'energia $E_p = pc$ que, per tant, tenen massa zero). La relació de dispersió no presenta gap, vegeu Fig. 4 (el proper exemple de camps que descriuen partícules massives, sí que en presenta, estant aquest gap relacionat amb la massa). Les solucions ondulatòries d'aquesta equació lineal obeeixen el principi de superposició. Diem que les partícules que corresponen a la quantificació d'aquestes ones són lliures o no interactuant. Si enviem aquestes partícules les unes contra les altres, se creuaran sense dispersar-se, com sabem que fa la llum.

Considerem un segon exemple[3] en la que la Lagrangiana, en particular l'energia potencial, continga un terme proporcional al camp, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ (ací hem considerat $c = 1$ i hem afegit el factor $\frac{1}{2}$ davant de m^2 per qüestió de presentació –podria perfectament estar absorbit en m^2). En aquest cas, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2\phi$ i per tant, les equacions de Lagrange presenten

[3] Aquests dos exemples són particularment importants, perquè del primer se poden derivar les equacions de Maxwell de l'electromagnetisme i del segon les equacions de Proca, les quals estan implicades en el model Standard per descriure el comportament de bosons vectorials massius que transporten la interacció feble, generen el potencial de Yukawa associat amb la interacció forta, fins i tot descriu l'electrodinàmica en superconductors (veure e.g. M. Tajmar, Phys. Lett. A 372(2008) 3289–3291).

aquest terme addicional: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0$. Substituint les derivades de la Lagrangiana $\mathcal{L}$ obtenim $\partial_\mu^2 \phi + m^2 \phi = 0$, que no és més que la coneguda equació de Klein-Gordon, la qual també admet solucions $\phi(x,t) = \sum_p a_p \, e^{-i\,(E_p t - p\,x)}$ amb una dispersió $E_p^2 = p^2 + m^2$, que correspon a partícules massives[4]. Òbviament, si fem $m = 0$ recuperem l'equació anterior de partícules sense massa. Amb $m \neq 0$ apareix un gap en la dispersió (a $p = 0$, $E_p = \pm m$). De nou, les equacions del moviment són lineals i per tant, les partícules descrites per aquesta teoria no interaccionen. La figura mostra la dispersió de partícules amb i sense massa (amb i sense gap).

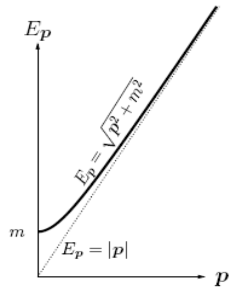

Figura 4 Relació de dispersió de partícules massives i partícules sense massa.

Explicitant la velocitat i diferenciant temps i coordenades, l'equació de Klein-Gordon pot ser reescrita en la forma $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 c^2 \phi$. Si considerem camps estacionaris, és a dir, independents del temps, amb simetria esfèrica, $\phi(r)$, i escrivim la Laplaciana en coordenades esfèriques trobem: $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi}{\partial r} \right) = m^2 c^2 \phi$.

Amb la substitució $r\phi = U$, efectuant les derivades i reorganitzant trobem $\frac{d^2 U}{dr^2} = m^2 c^2 U$, equació que presenta solucions particulars $U = U_0 \, e^{\pm m\,c\,r}$. Triem la solució negativa per ser la no divergent a l'infinit i, amb $\phi = U/r$, concloem que $\phi = -\frac{U_0}{r} e^{-r/a}$, on $a = 1/mc$, que és precisament el potencial de curt abast de Yukawa, responsable de la interacció forta que manté units els nuclis atòmics, malgrat la forta repulsió de Coulomb entre protons.

Si en la Lagrangiana incloem un terme d'interacció $\mathcal{L}_{int} = -\phi\rho$, on ρ és la densitat de la font, que per a una "càrrega forta" puntual escrivim $\rho = -g\delta(r)$, apareix un terme addicional a la dreta en l'equació resultant, que per a camps estacionaris i simetria esfèrica, queda en la forma $\nabla^2 \phi = m^2 c^2 \phi - g\delta(r)$. La solució de la qual és $\phi = \frac{g}{4\,\pi}\frac{e^{-mc\,r}}{r}$, on g és la "càrrega forta", com se pot comprovar per substitució directa.[5]

Resum

Hem realitzat una mirada somera a l'ús de principis variacionals per unificar la descripció clàssica d'ones i partícules i mostrat dos exemples de sistemes continus d'especial rellevància per la seua relació amb els potencials de Coulomb i Yukawa, que es corresponen amb diferents tipus de forces fonamentals de la natura.

[4] Com hem usat unitats en que $c = 1$, desapareix c de la relació de dispersió. Amb c aquesta dispersió és la coneguda fórmula relativista $E_p^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$.

[5] Cal recordar que $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(r)$ i, per tant, escrivim $\nabla^2(\phi - \frac{g}{4\,\pi}\frac{1}{r}) = m^2 c^2 \phi$. Aleshores ficant ∇^2 en esfèriques i substituint $\phi = \frac{g}{4\,\pi}\frac{e^{-mc\,r}}{r}$ en el membre de l'esquerra, trobem el membre de la dreta.

Apèndix: deducció intuïtiva de l'equació de Poisson en medis polaritzables

Considerem un semiconductor on trobem una densitat n_i^0 d'electrons i n_k^0 de nuclis, de manera que en situació d'equilibri hi ha una cancel·lació efectiva de densitat de càrrega: $\sum q_i n_i^0 = 0$.

En introduir una partícula j extra (partícula test), es crea un potencial $\phi_D(r)$ de polarització al voltant de j (on situem l'origen). Aquest potencial pertorba l'equilibri, què es restableix amb alteració de la densitat, la qual podem aproximar amb la fórmula exponencial de Boltzmann $n_i = n_i^0 \exp\left[-\frac{q_i \phi_D}{kT}\right] \approx n_i^0 \left(1 - \frac{q_i \phi_D}{kT}\right)$, que aproximem fins a terme lineal si aquesta alteració és moderada.

Hi ha doncs dues fonts de càrrega, $q_j \delta(\vec{r})$ i $\sum q_i n_i$, que cal introduir en l'equació de Poisson. Atès que $\sum q_i n_i^0 = 0$, la segona font resulta $\sum q_i n_i \approx -\sum \frac{n_i^0 q_i \phi_D}{kT} \equiv -\varepsilon_0 k_0^2 \phi_D$, on la darrera igualtat aprofita per definir k_0. L'equació de Poisson queda doncs: $-\nabla^2 \phi_D = \frac{q_j}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r}) - k_0^2 \phi_D$, que podem reescriure en la forma $\nabla^2 \phi_D = k_0^2 \phi_D - \tilde{q}_j \delta(\vec{r})$, amb $\tilde{q}_j = \frac{q_j}{\varepsilon_0}$, que presenta la forma de l'equació diferencial que general el potencial de Yukawa $\phi_D = \frac{q_j}{4\,\pi} \frac{e^{-k_0\,r}}{r}$.

Si el radi de l'esfera de polarització és molt petit, podem modelar-lo amb una contracàrrega proporcional a la càrrega test: $-k q_j \delta(\vec{r})$, de manera que l'equació de Poisson queda en la forma $-\nabla^2 \phi_D = (1-k)\, \frac{q_j}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r})$, la integració de la qual és: $\phi_D = \frac{q_j}{4\,\pi\varepsilon_0} \frac{(1-k)}{r} \approx \frac{q_j}{4\,\pi} \frac{1}{\varepsilon_0\,(1+k)} \frac{1}{r} = \frac{q_j}{4\,\pi\,\varepsilon} \frac{1}{r}$.