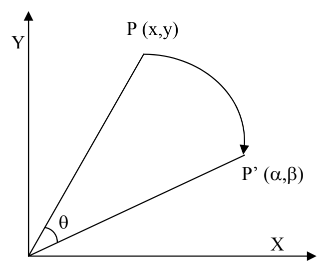
1 Transformacions de simetria de l'Hamiltonià

Teorema (Heine p.18): El conjunt de totes les tranformacions $\mathcal{O}_R$ que deixen invariant l'Hamiltonià d'un sistema formen un grup[1] isomorf al grup de les tranformacions R que deixen el sistema invariant.

Exemple: $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ amb les tranformacions $R_z(\theta)$ que tranformen les coordenades del sistema des de (x, y) fins (α, β). Des de la figura,

$$(\, xy \,) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \cos\theta & \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\sin\theta \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \sin\theta & \frac{\partial y}{\partial \beta} = \cos\theta \end{cases} \tag{1}$$



Definim l'acció de $\mathcal{O}_{R_z}(\theta)$ sobre $\mathcal{H}$ per la substitució de (x, y) per (α, β) en l'esmentat operador.
Tenim doncs que $\mathcal{O}_{R_z}(\theta)\,[\mathcal{H}(x, y)] = \mathcal{H}(\alpha, \beta)$. $\boxed{\text{L'Hamiltonià és invariant si } \mathcal{H}(\alpha, \beta) = \mathcal{H}(x, y).}$

Per comprovar l'invariança escrivim (α, β) en termes de (x, y):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y})}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y})}{\partial y}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\rightarrow \mathcal{H}(\alpha, \beta) = \mathcal{H}(x, y).$$

o, el que és el mateix, $\mathcal{O}_{R_z}(\theta)\,[\mathcal{H}(x, y)] = \mathcal{H}(x, y)$, on $\mathcal{O}_{R_z}(\theta)$ opera de la manera que hem definit abans.

Podíem alternativament partir de $\mathcal{H}\Psi = E\Psi$ i operar a esquerra: $\mathcal{O}_R\mathcal{H}\Psi = E\mathcal{O}_R\Psi$. Com $\mathcal{O}_R^{-1}\mathcal{O}_R = 1$ podem escriure $\mathcal{O}_R\mathcal{H}\mathcal{O}_R^{-1}\mathcal{O}_R\Psi = E\mathcal{O}_R\Psi$, definir $\Phi = \mathcal{O}_R\Psi$ i $\mathcal{H}' = \mathcal{O}_R\mathcal{H}\mathcal{O}_R^{-1}$, on $\mathcal{H}'$ és l'Hamiltonià en termes del sistema de coordenades tranformat, i concloure que $\mathcal{H}'\Phi = E\Phi$.

Si resulta que $[\mathcal{H}, \mathcal{O}_R] = 0$, aleshores $\mathcal{H}\mathcal{O}_R = \mathcal{O}_R\mathcal{H}$ i per tant $\mathcal{O}_R\mathcal{H}\mathcal{O}_R^{-1} = \mathcal{H}$. En altres paraules, $\mathcal{H}$ és invariant sota $\mathcal{O}_R$ *si i únicament si* commuta amb ell. En tal cas, el generador infinitesimal de la tranformació és una constant de moviment. Per exemple, si $[\mathcal{H}, \mathcal{O}_{R_z}(\theta)] = 0$, on $\mathcal{O}_{R_z}(\theta) = e^{-i\theta\hat{L}_z}$, aleshores la component z del moment angular $\hat{L}_z$ és una constant de moviment.

[1] Aquest pot ser un *ray group*. La diferencia entre un grup ordinari i un grup ray és que mentre que en el grup ordinari $R \cdot S = T$ en el ray $\mathcal{O}_R \cdot \mathcal{O}_S = e^{i\phi(R,S)}\mathcal{O}_{R \cdot S}$, on $\phi(R, S)$ és una fase el valor de la qual ve determinada per R i S.