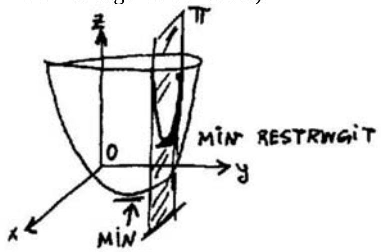
7. Multiplicadors indeterminats de Lagrange

Imaginem una funció *z(x,y)*. Trobar els mínims d'aquesta funció equival a cercar els valors (*x,y*) que anul·len la seua diferencial. Des d'un punt de vista pràctic, tenim dues incògnites (*x,y*) i dues equacions $\left(\partial z/\partial x\right)_y = 0$ i $\left(\partial z/\partial y\right)_x = 0$. Val a dir que aquestes equacions no són necessàriament lineals, aleshores, poden tenir solucions múltiples, i.e. la funció pot tenir més d'un extrem (generalment ens interessaran el mínims, però aquest procediment sols ens assegura que tenim un extrem. El seu caràcter de màxim, mínim, etc. caldrà mirar-lo en les segones derivades).



Sovint en física i química ens interessa localitzar mínims de funcions a les quals s'afegeix una restricció. A la figura adjunta hi podem veure un exemple: el mínim de la funció *z(x,y)* sota la restricció que (*x,y*) estiguen en la línia que defineix el tall del plànol π amb el plànol OXY.

Realment aquest "mínim" no és un veritable mínim de la funció *z(x,y)*, en el sentit que totes les derivades direccionals de *z(x,y)* siguen zero en aquest punt. És el mínim dins la varietat lineal definida per la intersecció de la superfície *z(x,y)* i el plànol π.
La restricció sobre les coordenades, que d'ara endavant escriurem $g(x,y) = 0$, no ha de ser necessàriament una recta (i així generar un plànol π), pot ser qualsevol corba. El problema que es planteja és, doncs, trobar l'extrem de *z(x,y)* sobre una varietat $g(x,y) = 0$.
Hi ha una direcció en la qual la diferencial és zero,

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy = 0 \qquad (1.1)$$

però (dx, dy) **no** són linealment independents, sinó que $g(x,y) = 0$, i.e.,

$$0 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x dy \qquad (1.2)$$

Si multipliquen eq. (1.2) per un paràmetre qualsevol (indeterminat) λ i li sumem l'eq. (1.1) obtenim:

$$dz = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y - \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\right]dx + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x - \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x\right]dy = 0 \qquad (1.3)$$

on, com abans, (dx, dy) són linealment dependents.
Triem λ (tenim la llibertat de fer-ho, atès que λ és qualsevol nombre) de manera que,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y - \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y = 0 \Rightarrow \lambda = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)_y \qquad (1.4)$$

Per a aquest valor concret de λ el primer sumand de l'eq. (1.3) és zero i com que $dy \neq 0$, necessàriament també s'ha de complir que:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x - \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1.5)$$

i, incidentalment comprovem que sobre l'extrem, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)_y = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_x$.

Generalitzant, si tenim una funció $f(x_1,...,x_N)$ i una sèrie de restriccions $g_1(x,y) = 0$, $g_2(x,y) = 0$,..., $g_{M<N}(x,y) = 0$, els extrems condicionats són solució del sistema d'equacions:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_j} - \sum_{k=1}^{M}\lambda_k\left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right)_{x_j} = 0 \;;\; i = 1,2...N \\ g_1(x,y) = 0 \\ g_2(x,y) = 0 \\ .... \\ g_M(x,y) = 0 \end{array}} \qquad (1.6)$$

Exemple: Considera la funció z= x^2+y^2, que representa un paraboloide amb mínim en el punt x = y = 0. Considerem la restricció definida per y = x+1 entre les seves variables. Aleshores substituint z = $x^2+(x+1)^2$. Calculem el mínim d'aquesta funció z restringida per la condició g(x,y) = y – x – 1 = 0, derivant: dz = 0 =4 x +2 → x = – 1/2 → y = 1/2.
Podem aplegar al mateix resultat fent ús del multiplicadors de Lagrange. Per això definim F(x,y) = z(x,y) – k g(x,y) = x^2 + y^2 – k (y – x – 1). Calculem les parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}} = 2\mathrm{x} + \mathrm{k} = 0 \;;\; \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}} = 2\mathrm{y} - \mathrm{k} = 0 \rightarrow \mathrm{x} = -\mathrm{y}.$$

Si considerem ara la restricció g(x,y) = y – x – 1 = 0 i la substituïm, obtenim el mateix resultat que abans: x = – 1/2 ; y = 1/2.