Principi Variacional d'Euler-Lagrange

JOSEP PLANELLES

Departament de Química Física i Analítica, Universitat Jaume I,

Apartat 224, E-12080 Castelló, Spain

Agost 2010

1 Camí d'integració i equació d'Euler-Lagrange

Cal fer mínim el funcional $\Psi(\alpha)$ variant el paràmetre α que tria una entre les funcions de la família $y(x,\alpha)$ (vegeu figura 1):

$$\Psi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)]dx \tag{1}$$

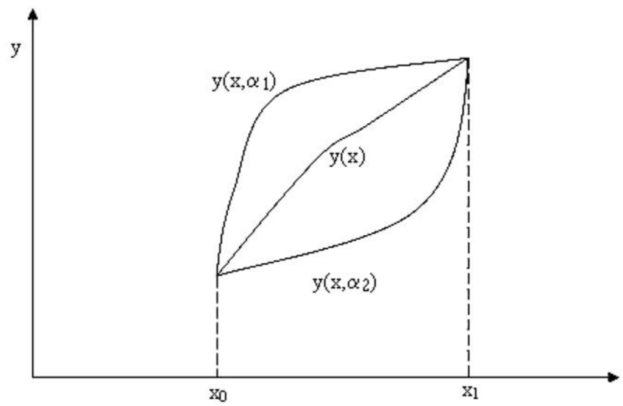

Figure 1: Camins d'integració $y(x,\alpha_i)$ i camí òptim, $\alpha = 0$, $y(x)$.

L'integrand és funció de la coordenada x de la funció y i de la seua derivada y'. Per conveniència direm que la funció òptima és $y(x,\alpha=0)$ o simplement $y(x)$. Com volem que el funcional siga mínim derivarem respecte del paràmetre i igualarem a zero:

$$\Psi'(\alpha) = 0 = \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha})dx \equiv \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')dx \tag{2}$$

on hem definit $\delta y = [y(x,\alpha) - y(x)]/\alpha$, i per tant, $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha \delta y$ i $\delta y = \partial y/\partial \alpha$. Tanmateix, $\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\delta y = (\delta y)'$.

Considerem ara la següent integral que integrem per parts:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(\delta y)' dx = [F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta y \frac{d}{dx} F_{y'} dx \tag{3}$$

com en els extrems d'integració $\delta y = 0$ (vegeu figura 1), portant eq. 3 a 2 resulta que:

$$\Psi'(\alpha) = 0 = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx \tag{4}$$

com δy és una funció contínua i arbritrària de la variable x, cal que l'integrand siga zero i apleguem a l'equació d'Euler-Lagrange $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ que reescrivim explícitament

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial(\frac{dy}{dx})} = 0 \tag{5}$$

2 Funcional $\Psi(\alpha,\beta) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)]dx$

En aquest cas cal mimimitzar $\Psi(\alpha,\beta)$, per tant, farem zero les derivades parcials:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = 0 \to \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx = 0 \to \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = 0 \to \int_{x_0}^{x_1}(F_z\delta z + F_{z'}\delta z')dx = 0 \to \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = 0 \tag{7}$$

3 Funcional $\Psi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} F[x, y, z(x, y, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}]dxdy$

Ananomenem $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Cal mimimitzar $\Psi(\alpha)$, per tant, farem zero las derivada:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = 0 \to \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}[\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \alpha}]dxdy \tag{8}$$

, de manera semblant a com hem fet en la primera secció definim $p(x,\alpha) = p(x) + \alpha\delta p \to \delta p = \partial p/\partial\alpha$, també $z(x,\alpha) = z(x) + \alpha\delta z \to \delta z = \partial z/\partial\alpha$. Anomenem $F_z = \partial F/\partial z$,$F_p = \partial F/\partial p$, etc. Amb tot açò reescrivim l'equació 8 de la forma

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}[F_z\delta z + F_p\delta p + F_q\delta q]dxdy = 0 \tag{9}$$

Considerem ara:

$$\frac{\partial}{\partial x}[F_p \cdot \delta z] = \delta z\frac{\partial F_p}{\partial x} + F_p\frac{\partial(\delta z)}{\partial x} \tag{10}$$

com que $\frac{\partial(\delta z)}{\partial x} = \delta(\frac{\partial z}{\partial x}) = \delta p$ tenim que:

$$F_p\delta p = \frac{\partial}{\partial x}[F_p \cdot \delta z] - \frac{\partial F_p}{\partial x}\delta z \tag{11}$$

Anàlogament

$$F_q\delta q = \frac{\partial}{\partial x}[F_p \cdot \delta z] - \frac{\partial F_q}{\partial y}\delta z \tag{12}$$

Per tant,

$$0 = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left[(F_z - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y})\delta z + \frac{\partial}{\partial x}[\underbrace{F_p \cdot \delta z}_{N}] + \frac{\partial}{\partial y}[\underbrace{F_q \cdot \delta z}_{M}]\right] dxdy \tag{13}$$

Tenim en compte ara la identitat,

$$\int\int_S \left((\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy = \int_C (Ndy - Mdx) \tag{14}$$

els dos darrers termes queden

$$\int_C F_p \delta z dy - \int_C F_q \delta z dx \tag{15}$$

però sobre la frontera de la integració $\delta z = 0$, Aleshores 13 es converteix en

$$0 = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left[F_z - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y}\right]\delta z dxdy \tag{16}$$

Per tant, $F_z - \partial F_p/\partial x - \partial F_q/\partial y = 0$. Explícitament:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})} = 0 \tag{17}$$

4 Funcional

$$\Psi(\alpha, \beta) = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} F[x, y, z_1^{\alpha}(x, y), z_2^{\beta}(x, y), z'_{1x}, z'_{1y}, z'_{2x}, z'_{2y},]dxdy$$

D'acord amb la secció II, cal derivar separadament el funcional respecte de cadascún dels paràmetres i igualar a zero.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left[\frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial F}{\partial z'_{1x}}\delta z'_{1x} + \frac{\partial F}{\partial z'_{1y}}\delta z'_{1y}\right] dxdy = 0 \tag{18}$$

D'acord amb 17 aquesta equació implica que

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial(\frac{\partial z_1}{\partial x})} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial(\frac{\partial z_1}{\partial y})} = 0 \tag{19}$$

Anàlogament fem que $\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = 0$ i obtenim una equació similar on apareix z_2 en lloc de z_1.

Si anomenem $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a les coordenades i $u_1, u_2, u_3, \ldots$ a les funcions obtenim que per a tot i,

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})} = 0 \tag{20}$$

Si F és independent de les funcions u_i i sols depen de les seues derivades, anomenant $u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ tenim que

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} = 0; i = 1, 2... \tag{21}$$

Aquesta equació per al cas elàstic es converteix, com mostrem en la seguent secció, en

$$\sum_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[C_{ijkl}(u_{kl} + \epsilon^0_{kl}) \right] = 0; i = 1, 2... \tag{22}$$

5 El cas d'elàsticitat

En aquest cas tenim que:

$$F = \sum_{ijkl} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad ; \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \epsilon^0_{ij} \tag{23}$$

Per tant, anomenant $u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$,

$$F = \sum_{ijkl} C_{ijkl} \left[\frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) + \epsilon^0_{ij} \right] \left[\frac{1}{2}(u_{kl} + u_{lk}) + \epsilon^0_{kl} \right] \tag{24}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha,\beta}} = \sum_{ijkl} C_{ijkl} \left\{ \left[\epsilon_{kl} \frac{1}{2}(\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j}\delta_{\beta i}) \right] + \left[\epsilon_{ij} \frac{1}{2}(\delta_{\alpha k}\delta_{\beta l} + \delta_{\alpha l}\delta_{\beta k}) \right] \right\} \tag{25}$$

$$\tag{26}$$

$$= \sum_{kl} \epsilon_{kl} \frac{1}{2}(C_{\alpha\beta kl} + C_{\beta\alpha kl}) + \sum_{ij} \epsilon_{ij} \frac{1}{2}(C_{ij\alpha\beta} + C_{ij\beta\alpha}) \tag{27}$$

Si existeix la simetria $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, aleshores

$$\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha,\beta}} = \sum_{kl} \epsilon_{kl} C_{\alpha\beta kl} + \sum_{ij} \epsilon_{ij} C_{ij\alpha\beta} \tag{28}$$

Si existeix la simetria $C_{ijkl} = C_{klij}$, aleshores

$$\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha,\beta}} = 2\sum_{ij} \epsilon_{ij} C_{ij\alpha\beta} = 2\sum_{ij} \epsilon_{ij} C_{\alpha\beta ij} \tag{29}$$

Aleshores, l'equació 21 es particularitza

$$2\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \sum_{ij} \epsilon_{ij} C_{\alpha\beta ij} = 0 \tag{30}$$

que reescrivim,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} [C_{ijkl} \epsilon_{ij}] && (31) \\ &= \sum_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ C_{ijkl} [\frac{1}{2}(u_{kl} + u_{lk}) + \epsilon^0_{kl}] \right\} && (32) \\ &= \sum_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ C_{ijkl} [u_{kl} + \epsilon^0_{kl}] \right\} = 0 && (33) \end{aligned}$$

En resum tenim per a cada j:

$$\sum_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ C_{ijkl} [u_{kl} + \epsilon^0_{kl}] \right\} = 0 \tag{34}$$