

# Electrodinàmica axiònica per a principiants

Josep Planelles

16 de novembre de 2021

## 1 Introducció

D'acord amb la teoria de bandes, els aïllants se defineixen com aquells materials que presenten un *gap* entre la valència ocupada i la conducció vacant, mentre que els conductors no presenten *gap* (bé perquè la darrera banda està semi-ocupada o perquè les bandes de conducció i valència solapen).

L'any 2006 se van observar propietats electromagnètiques inusuals en un *quantum well* de *HgTe* amb barres de *CdTe*: [1] aquest pou quàntic se comportava en *bulk* com un aïllant però en la superfície (interfase) s'observava corrent elèctric, i.e., se comportava com un conductor. I la cosa més cridanera fou que aquest comportament no podia explicar-se a partir de les equacions de Maxwell.

Amb anterioritat, en 1987, Franck Wilzek [2] va suggerir el possible comportament d'aquest tipus de material i va indicar que podria explicar-se acudint a l'electrodinàmica axiònica que ell mateix [3] i Steven Weinberg [4] van desenvolupar, postulant l'existència d'una partícula, l'axiò, per poder entendre la violació de simetries combinades de conjugació de càrrega i paritat en les anomenades interaccions fortes.

En un paper relativament recent Qi i Zhang [5] presenten i comenten resultats experimentals on s'evidencia que un pou quàntic *CdTe|HgTe|CdTe* presenta una resistència quasi infinita (aïllant) si l'espessor del *HgTe* és inferior a una distància crítica  $d \sim 6.5nm$ , mentre que si  $d > 6.5nm$  la resistència és petita i presenta els típics plateaux de l'efecte Hall quàntic.

L'electrodinàmica axiònica pot interpretar aquest comportament. A tal efecte cal introduir un paràmetre  $\theta$ , relacionat amb la fase de Berry i el *Chern number*. Aquest paràmetre, que s'anomena polaritzabilitat magnetoelèctrica, és una funció constant a trossos (*piecewise constant*). Se considera  $\theta = 0$  en un aïllant trivial i  $\theta = \pi$  en un aïllant topològic amb simetria d'inversió temporal (*time-reversal*), com és el cas de la sal de mercuri esmentada. L'electrodinàmica axiònica també permet interpretar la resposta dels anomenats semimetals de Weyl si fem que  $\theta(x, t) = 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} - 2b_0t$  [6] o, en general, l'electrodinàmica de medis magnetoelèctrics. [7] Pot ser adient comentar que assumir un angle axiònic  $\theta(x, t)$  constant, en lloc de ser un camp funció de les coordenades i el temps, assegura la preservació de la simetria translacional espacial i temporal. [8]

## 2 Electrodinàmica en un medi $\theta$

L'electromagnetisme en medis materials ve descrit per les equacions de Maxwell, que en forma diferencial i a.u., són:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (\text{Llei de Gauss}) \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Llei de Faraday})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Llei de Gauss per al magnetisme}) \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (\text{Llei d'Ampere})$$

conjuntament amb les relacions de  $\mathbf{D}, \mathbf{H}$  en termes de  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ , que en medis lineals és simplement  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$ , amb  $\epsilon, \mu$  la constant dielèctrica i permeabilitat magnètica del medi. Per a materials isòtrops  $\epsilon$  i  $\mu$  són constants, mentre que en materials anisòtrops són tensors que eventualment poden ser funció de les coordenades i el temps.

En el cas de medis topològics, on hi ha efectes magnetoelèctrics, el vector desplaçament  $\mathbf{D}$  es veu influït per la inducció magnètica  $\mathbf{B}$ . De manera semblant, la intensitat  $\mathbf{H}$  de camp magnètic es veu influenciada pel camp elèctric. En conseqüència, les relacions  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  ha de modificar-se:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} - \frac{\theta\alpha}{\pi} \mathbf{B} \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\theta\alpha}{\pi} \mathbf{E}$$

amb  $\alpha = 1/137$  (adimensional) la constant d'estructura fina i  $\theta$  un paràmetre adicional del medi que podem considerar al mateix nivell que la permitivitat  $\epsilon$  o la permeabilitat  $\mu$ . Per a medis ordinaris  $\theta = 0$  i recuperem les equacions de Maxwell.

La consideració d'aquesta modificació en les relacions constitutives de  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{H}$  comporten la modificació de dues de les quatre lleis de Maxwell, com mostrarem després. Però abans farem una pinzellada sobre l'aparició *natural* d'aquest terme extra en l'electromagnetisme. A tal efecte recorde que l'energia electromagnètica pot ser expressada en la forma:

$$W = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2)$$

mentre que la Lagrangiana és:[9]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 - \frac{1}{2\mu} B^2$$

A partir d'aquesta Lagrangiana, a través de les equacions variacionals d'Euler-Lagrange se poden deduir les equacions de Maxwell (veure e.g. Civelek et al.[10]).

Observem que la lagrangiana és quadràtica respecte del camp electromagnètic. Aleshores F. Wilczek[2] fa notar que existeix un terme quadràtic adicional del camp electromagnètic que la Lagangiana anterior no inclou:

$$\Delta \mathcal{L} = \kappa \theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

i, amb l'addició d'aquest terme, obté les equacions del que hom anomena electrodinàmica axiònica. Nosaltres ací, però, seguirem un camí menys elegant però més senzill: incorporarem, com havíem avançat adès, les relacions constitutives de  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{H}$  en un medi amb  $\theta \neq 0$ . Tornem sobre les equacions de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (\text{canvia per canviar D}) \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{no canvia}) \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{no canvia}) \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (\text{canvia per canviar H i D}) \quad (4)$$

Afegim les relacions constitutives:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} - \frac{\theta \alpha}{\pi} \mathbf{B} \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\theta \alpha}{\pi} \mathbf{E} \quad (6)$$

Des de les equacions (1), (5) escrivim  $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho + \frac{\alpha}{\pi} \nabla \cdot (\theta \mathbf{B})$ , que tenint en compte la divergència nul·la de  $\mathbf{B}$ , eq. (2), reescrivim finalment l'eq. (1) en la forma:

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho + \frac{\alpha \nabla \theta}{\pi} \cdot \mathbf{B} \quad (7)$$

Anàlogament, des de les equacions (4), (5) i (6) escrivim:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial (\theta \mathbf{B})}{\partial t} - \frac{\alpha}{\pi} \nabla \times (\theta \mathbf{E})$$

Efectuem les derivades dels dos darrers termes:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial (\theta \mathbf{B})}{\partial t} - \frac{\alpha}{\pi} \nabla \times (\theta \mathbf{E}) &= -\frac{1}{c} \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{B} + \theta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \frac{\alpha}{\pi} (\nabla \theta \times \mathbf{E} + \theta \nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \theta \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{E} \right) - \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \theta \times \mathbf{E} \right) \end{aligned}$$

El primer parèntesi de la darrera equació és zero en virtut de l'eq (3). Per tant, l'eq (4) se transforma en:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{B} - \frac{\alpha}{\pi} \nabla \theta \times \mathbf{E} \quad (8)$$

Les noves equacions (7) i (8), que reemplaçen les eqs. (1) i (4), suggereixen definir, des de (7) la càrrega efectiva  $\rho_\theta$ :

$$4\pi\rho_\theta = \frac{\alpha \nabla \theta}{\pi} \cdot \mathbf{B} \rightarrow \boxed{\rho_\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2} \nabla \theta \cdot \mathbf{B}} \quad (9)$$

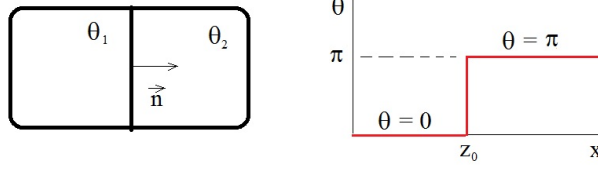
i des de (8) la densitat de càrrega efectiva  $\mathbf{J}_\theta$ :

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_\theta = \frac{\alpha}{\pi} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{B} - \nabla \theta \times \mathbf{E} \right) \rightarrow \boxed{\mathbf{J}_\theta = \frac{\alpha}{4\pi^2} \left( -\frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{B} - c \nabla \theta \times \mathbf{E} \right)} \quad (10)$$

Fem notar que si  $\theta = 0$  aleshores les equacions (7) i (8) tornen a ser (1) i (4). Tanmateix, si  $\theta$  és una constant, independent de les coordenades i el temps, aleshores  $\rho_\theta = \mathbf{J}_\theta = 0$  i recuperem de nou les equacions

de Maxwell.

Hem dit més amunt que en el buit i en un aïllant ordinari  $\theta = 0$ , mentre que  $\theta = \pi$  en el cas d'un aïllant topològic amb simetria de *time reversal*. Per tant,  $\theta$  és una funció constant a trossos (vegeu figura)



Si  $\theta(z)$  és una funció escaló, aleshores  $\nabla\theta = \pi\delta(z_0)\mathbf{n}$ , on  $\mathbf{n}$  és un vector unitari en la direcció  $z$  i  $\delta(z_0)$  és el delta de Dirac (vegeu la nota [11]). En conseqüència, des de l'eq. (10), com  $\theta$  no és funció del temps, trobem

$$\mathbf{J}_\theta = -\frac{c\alpha}{4\pi}\delta(z_0)\mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (11)$$

Anàlogament, des de l'eq. (9) trobem:

$$\rho_\theta = \frac{\alpha}{4\pi}\delta(z_0)\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \quad (12)$$

Doncs bé, aquest conjunt d'equacions (7), (2), (3), (8) són les que introdueix F. Wilczek[2] per definir l'electrodinàmica axiònica i són emprades majoritàriament (veure e.g. [12] (equació 39), [8] (equació 68)). Tanmateix, Luca Visinelli[13] puntualitza que quan un pseudo-escalar  $\theta = \theta(x)$  s'introdueix en la teoria de Maxwell les invariàncies d'aquestes equacions sota rotacions que mesclen camps elèctric i magnètic,

$$\begin{pmatrix} E' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}$$

se trenca. Argumenta indicant que la interacció axiònica sols modifica dues de les quatre equacions de Maxwell. Aquest autor obté unes noves equacions de Maxwell en presència de camp axiònic amb el requeriment addicional que camp magnètic i elèctric donen compliment a la rotació anterior per a un valor arbitrari de  $\xi$  (eq. 26 en [13], en les que també les equacions (2), (3) queden modificades).[14]

### 3 Càrregues d'imatge en aïllants topològics

#### 3.1 Condicions frontera en la interfase amb un aïllant topològic

A la secció segon de l'Apèndix 1 s'obtenen les condicions frontera per al desplaçament elèctric  $\mathbf{D}$  i la intensitat  $\mathbf{H}$  de camp magnètic en electrostàtica i magnetostàtica (i.e., camps independents del temps). En particular,  $\mathbf{D}_{2\perp} = \mathbf{D}_{1\perp} + \sigma$ , on implícitament considerem que la frontera on hi ha la càrrega superficial lliure és el medi 1. En una interfase entre aïllants ordinaris no hi ha càrrega lliure i per tant  $\sigma = 0$ . Si considerem que el medi de l'esquerra o medi 1 és ordinari i el de la dreta o medi 2 és topològic, sobre el segon és on hi ha la densitat que, d'acord amb l'eq. (12), val  $\sigma = \frac{\alpha}{4\pi}\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$  (notem que la direcció de  $\mathbf{B}_z$  determina el signe de  $\sigma$ ). Per tant, anomenant  $B_z \equiv \mathbf{B}_z(z=0)$ , la condició frontera la podem reescriure en la forma:

$$\epsilon_1\mathbf{E}_{1\perp} = \epsilon_2\mathbf{E}_{2\perp} + \alpha B_z \quad (13)$$

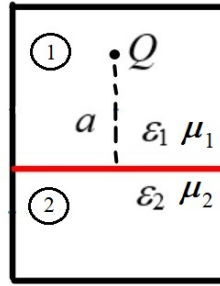
La segon condició  $\mathbf{H}_{1\parallel} = \mathbf{H}_{2\parallel} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_s$ , amb un corrent segons l'eq. (11)  $\mathbf{J}_s = -\frac{c\alpha}{4\pi}\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ , resulta:

$$\frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_{1\parallel} = \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_{2\parallel} - \alpha\mathbf{E}_{\parallel} \quad (14)$$

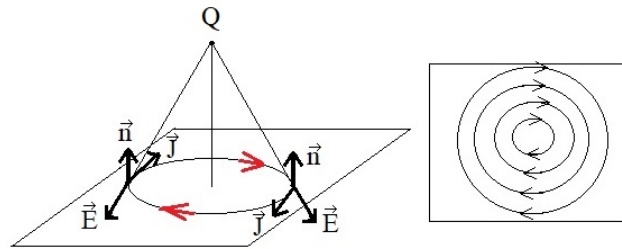
on  $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}(x, y, 0)$  (perquè hem assumit una interfase a  $z = 0$ ).

### 3.2 Imatges generades per una càrrega situada prop de la interfase aïllant ordinari - aïllant topològic

Considerem que, excepte a la interfase, no hi ha càrregues ni corrents i a més considerem un problema estàtic i.e., sense dependència temporal de la inducció magnètica  $\mathbf{B}$  ni del camp elèctric  $\mathbf{E}$ . Per tant, excepte a la interfase, les equacions (1), (2), (3), (4) de Maxwell esdevenen simplement  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  i  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ . Ara bé, si el rotacional d'un camp vectorial és zero, vol dir que aquest camp vectorial es pot escriure com el gradient d'un camp escalar. Per tant, des de  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  concloem que  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . Per una altra banda, si  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ , des de l'equació constituent (6), se segueix que  $\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\theta\alpha}{\pi}\mathbf{E} \right) = 0$  i, en conseqüència,  $\frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\theta\alpha}{\pi}\mathbf{E} = -\nabla W$  o, equivalentment,  $\mathbf{B} = -\nabla \left[ \mu \left( W - \frac{\theta\alpha}{\pi}V \right) \right] = -\nabla U$ . Per tant, podem definir *potencials elèctrics i magnètics*, d'on determinar els camps mitjançant el càlcul dels gradients i canviant el signe.



Considerem una càrrega elèctrica  $Q$  situada en la posició  $(0, 0, a)$  d'un medi ordinari amb constants  $\epsilon_1, \mu_1$  separat d'un aïllant topològic amb constants  $\epsilon_2, \mu_2, \alpha$  (els valors de  $\theta$  són zero en l'aïllant ordinari i  $\pi$  en el topològic). Considerem que la frontera està en  $z = 0$ . El mètode d'imatges (vegeu apèndix 1) ens diu que per calcular el potencial en la zona ordinària (zona 1,  $z > 0$ ) cal afegir una càrrega fictícia en la posició  $(0, 0, -a)$  i per calcular en la zona de l'aïllant topològic (zona 2,  $z < 0$ ) cal afegir la càrrega fictícia en  $(0, 0, a)$ . En la interfase si apliquem un camp magnètic, que no és el cas, se generen càrregues superficials  $\sigma = \frac{\alpha}{4\pi}\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$  i si apliquem un camp elèctric, que sí que és el cas quan afegim la càrrega, se generen corrents superficials  $\mathbf{J}_s = -\frac{c\alpha}{4\pi}\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ , que, en particular, la simetria axial del camp elèctric de la càrrega afegida i la fórmula de  $\mathbf{J}_s$  ens fa concloure que es generen corrents circulars al voltant de l'eix que uneix càrrega i interfase (vegeu Figura).



Aquest corrent és generat per la càrrega  $Q$  situada en  $z > 0$  i provoca a l'altra banda de la interfase,  $z < 0$ , un camp magnètic proporcional al camp elèctric de la càrrega  $Q$ , el mateix camp magnètic que generaria un monopol magnètic  $p$  situat en una posició  $(0, 0, b)$ , en la mateixa vertical que l'esmentada càrrega. Tanmateix, també genera en la zona  $z > 0$  un altre camp magnètic també proporcional al camp elèctric, el mateix camp magnètic que generaria un monopol magnètic  $p$  situat, per raons de simetria, en una posició  $(0, 0, -b)$ . La intensitat del camp és proporcional al camp elèctric i, per tant proporcional a  $\frac{r}{r^3}$ , que és precisament el camp del monopol magnètic.

Els potencials elèctric i magnètics en una i altra zona, d'acord amb el mètode d'imatges (apèndix 1), són:<sup>1</sup>

$$V(x, z > 0) = \frac{Q/\epsilon_1}{[x^2 + (z - a)^2]^{1/2}} + \frac{q}{[x^2 + (z + a)^2]^{1/2}} \quad (15)$$

$$V(x, z < 0) = \frac{Q/\epsilon_1}{[x^2 + (z - a)^2]^{1/2}} + \frac{q}{[x^2 + (z + a)^2]^{1/2}} \quad (16)$$

$$U(x, z > 0) = \frac{p_1}{[x^2 + (z + b)^2]^{1/2}} \quad (17)$$

$$U(x, z < 0) = \frac{p_2}{[x^2 + (z - b)^2]^{1/2}} \quad (18)$$

La continuïtat de  $\mathbf{B}_\perp = -\frac{\partial U}{\partial z}$  a través de la frontera obliga a que la derivada respecte  $z$  de  $U$  definida en la zona  $z > 0$  i en la zona  $z < 0$  siguin iguals en  $z = 0$ :

$$p_1 \frac{(z^0 + b)}{[x^2 + (z^0 + b)^2]^{3/2}} = p_2 \frac{(z^0 - b)}{[x^2 + (z^0 - b)^2]^{3/2}} \rightarrow \boxed{p_1 = -p_2}$$

La continuïtat en  $z = 0$  de  $\mathbf{D}_\perp$ , eq. (13),  $\epsilon_1 \mathbf{E}_{1\perp} = \epsilon_2 \mathbf{E}_{2\perp} + \alpha B_z$  amb  $B_z = -(\frac{\partial U}{\partial z})_0$ ,  $\mathbf{E}_\perp = -(\frac{\partial V}{\partial z})_0$ , dóna lloc a:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \left( \frac{Q}{\epsilon_1} \frac{(z^0 - a)}{[x^2 + (z^0 - a)^2]^{3/2}} + q \frac{(z^0 + a)}{[x^2 + (z^0 + a)^2]^{3/2}} \right) &= \epsilon_2 \left( \frac{Q}{\epsilon_1} \frac{(z^0 - a)}{[x^2 + (z^0 - a)^2]^{3/2}} + q \frac{(z^0 - a)}{[x^2 + (z^0 - a)^2]^{3/2}} \right) \\ &\quad + \alpha p_1 \frac{(z^0 + b)}{[x^2 + (z^0 + b)^2]^{3/2}} \\ \rightarrow Q \left( 1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \frac{(-a)}{[x^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{aq}{[x^2 + a^2]^{3/2}} (\epsilon_1 + \epsilon_2) &= \frac{b}{[x^2 + b^2]^{3/2}} \alpha p_1 \quad \forall x \\ &\rightarrow \boxed{a = b} \\ \rightarrow Q \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} \right) + (\epsilon_1 + \epsilon_2) q &= \alpha p_1 \rightarrow \boxed{p_1 = \frac{Q}{\alpha} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} + \frac{q}{\alpha} (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad (19) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>La falta de simetria del cam magnètic (i qualsevol vector axil) respecte un plànol horitzontal ens fa escriure  $p_1$  i  $p_2$ , tot esperant que  $p_1$  i  $p_2$  siguin iguals, excepte el signe.

<sup>2</sup>En la derivació hem calculat  $B_z$  a partir de la derivada en  $z = 0$  del potencial  $U(z > 0)$ . La derivada potencial de  $U(z < 0)$  en  $z = 0$  dóna exactament el mateix resultat perquè el canvi de signe de la càrrega de monopol i de la posició del monopol,  $\pm b$  en el potencial magnètic d'una i altra zona se compensen.

La continuïtat en  $z = 0$  del vector  $\mathbf{H}_{\parallel}$ , eq. (14),  $\frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_{1\parallel} = \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_{2\parallel} - \alpha\mathbf{E}_{\parallel}$ , amb  $p_1 = -p_2$ ,  $\mathbf{B}_{\parallel} = -(\frac{\partial U}{\partial x})_{z=0}$ ,  $\mathbf{E}_{\parallel} = -(\frac{\partial V}{\partial x})_{z=0}$ , i que  $(\frac{\partial V(z>0)}{\partial x})_{z=0} = (\frac{\partial V(z<0)}{\partial x})_{z=0}$ , trobem que, a  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1} \frac{x p_1}{[x^2 + a^2]^{3/2}} &= \frac{1}{\mu_2} \frac{x (-p_1)}{[x^2 + a^2]^{3/2}} + \alpha \left( \frac{Q}{\epsilon_1} \frac{(-x)}{[x^2 + a^2]^{3/2}} + q \frac{(-x)}{[x^2 + a^2]^{3/2}} \right) \\ \rightarrow \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) p_1 &= -\alpha \left( \frac{Q}{\epsilon_1} + q \right) \\ &\rightarrow \boxed{p_1 = -\frac{\alpha}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}} \left( \frac{Q}{\epsilon_1} + q \right)} \end{aligned} \quad (20)$$

Combinant les equacions (19) i (20) trobem que:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\alpha} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} + \frac{q}{\alpha} (\epsilon_1 + \epsilon_2) &= -\frac{\alpha}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}} \left( \frac{Q}{\epsilon_1} + q \right) \\ \rightarrow \frac{Q}{\epsilon_1} \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\alpha} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}} \right) + q \left( \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\alpha} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}} \right) &= 0 \\ \rightarrow q = -\frac{Q}{\epsilon_1} \frac{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\alpha} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}}}{\frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{\alpha} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}}} \\ &\rightarrow \boxed{q = \frac{Q \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) (\epsilon_1 - \epsilon_2) - \alpha^2}{\epsilon_1 \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) (\epsilon_1 + \epsilon_2) + \alpha^2}} \end{aligned} \quad (21)$$

Substituint  $q$ , eq. (21), en l'eq. (20) i anomenant  $M = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$ , trobem que:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{\alpha}{M} \left( \frac{Q}{\epsilon_1} + \frac{Q}{\epsilon_1} \frac{M(\epsilon_1 - \epsilon_2) - \alpha^2}{M(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \alpha^2} \right) = -\frac{\alpha}{M} \frac{Q}{\epsilon_1} \left( 1 + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) - \alpha^2/M}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \alpha^2/M} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{M} \frac{Q}{\epsilon_1} \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \alpha^2/M + (\epsilon_1 - \epsilon_2) - \alpha^2/M}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \alpha^2/M} = -\frac{\alpha Q}{\epsilon_1} \frac{2\epsilon_1}{M(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \alpha^2} \\ &\rightarrow \boxed{p_1 = -\alpha \frac{2Q}{\left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) (\epsilon_1 + \epsilon_2) + \alpha^2}} \end{aligned} \quad (22)$$

Les eqs. (21) i (22) ens proporcionen la càrrega i monopòl induïts per  $Q$  en la interfase entre l'aïllant ordinari i l'aïllant topològic.<sup>3</sup>

### 3.3 Imatges generades per un monopòl magnètic situat prop de la interfase aïllant ordinari - aïllant topològic

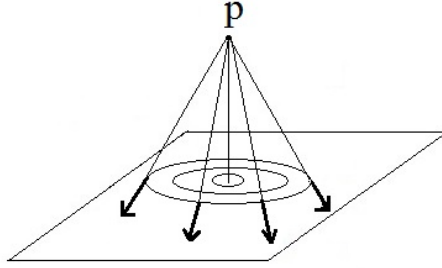
No entrem ací a considerar l'existència real o no del monopòl magnètic. En tot cas, dos monopòls a una distància definida formen un dipòl, que és segur que té existència real. Per tant, en tot cas, la imatge del monopòl pot servir per calcular les imatges de multipòls aprofitant el principi de superposició.

<sup>3</sup>L'eq. (21) coincideix amb l'eq. 3.2 i la (22) amb la 3b de [15], si identifiquem  $\alpha^2$  amb  $4P_3^2\alpha^2$  i tenim en compte que, compodem llegir en la pag. 1185 d'aquest paper,  $P_3 = \pm\frac{1}{2}$ , i per tant,  $4P_3^2 = 1$ .

Hem comentat adés que una càrrega elèctrica en les rodalies d'una interfase amb un aïllant topològic, situada en  $z_0$ , crea un cap elèctric que genera un corrent superficial, eq. (11),  $\mathbf{J}_\theta = -\frac{c\alpha}{4\pi}\delta(z_0)\mathbf{n} \times \mathbf{E}$  equivalent al que genera un monopol magnètic simètricament situat respecte de la càrrega elèctrica amb una càrrega magnètica, eq. (22),  $p = -\frac{2\alpha}{(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2})(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \alpha^2} Q$ .

De manera semblant, un monopol magnètic en les rodalies d'una interfase amb un aïllant topològic, situat en  $z_0$ , crea un camp magnètic  $\mathbf{B}$  el qual genera una densitat superficial de càrrega, eq. (12),  $\rho_\theta = \frac{\alpha}{4\pi}\delta(z_0)\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$ .

Atès que el monopol genera un camp radial (com el camp elèctric que genera una càrrega o monopol elèctric, vegeu Figura), la densitat de càrrega induïda pel monopol magnètic generarà un potencial elèctric igual al d'una càrrega elèctrica  $q$  situada en la posició que determina el mètode d'imatges.



De manera anàloga a les imatges d'una càrrega elèctrica, un monopol magnètic  $P$  genera un potencials elèctric ( $V$ ) i magnètic ( $U$ ) donat per:

$$U_1(x, z > 0) = \frac{\mu_1 P}{[x^2 + (z - a)^2]^{1/2}} + \frac{p_1}{[x^2 + (z + a)^2]^{1/2}} \quad (23)$$

$$U_2(x, z < 0) = \frac{\mu_1 P}{[x^2 + (z - a)^2]^{1/2}} + \frac{p_2}{[x^2 + (z - a)^2]^{1/2}} \quad (24)$$

$$V_1(x, z > 0) = \frac{q}{[x^2 + (z + b)^2]^{1/2}} \quad (25)$$

$$V_2(x, z < 0) = \frac{q}{[x^2 + (z - b)^2]^{1/2}} \quad (26)$$

$$(27)$$

amb les condicions frontera:

$$\epsilon_1 \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} \right)_0 = \epsilon_2 \left( \frac{\partial V_2}{\partial z} \right)_0 + \alpha \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 \quad (28)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_0 - \alpha \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_0 \quad (29)$$

on atès que  $\left( \frac{\partial U_1}{\partial z} \right)_0 = \left( \frac{\partial U_2}{\partial z} \right)_0$  i que  $\left( \frac{\partial V_1}{\partial x} \right)_0 = \left( \frac{\partial V_2}{\partial x} \right)_0$ , escrivim  $U$  i  $V$  sense subíndexs.

De la primera condició frontera, eq. (28) trobem:

$$\frac{\epsilon_1 q b}{[x^2 + b^2]^{3/2}} = \frac{-\epsilon_2 q b}{[x^2 + b^2]^{3/2}} + \alpha \left( \frac{\mu_1 P a}{[x^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{\mu_1 p_1 a}{[x^2 + a^2]^{3/2}} \right) \forall x \rightarrow \boxed{a = b} \quad (30)$$



i tornant sobre aquesta mateixa equació amb  $a = b$  tenim:

$$\epsilon_1 q = -\epsilon_2 q + \alpha (\mu_1 P + p_1) \rightarrow \boxed{q = \frac{\alpha}{\epsilon_1 + \epsilon_2} (p_1 - \mu_1 P)} \quad (31)$$

De la segon condició frontera, eq. (29) trobem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\mu_1 P x}{[x^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{p_1 x}{[x^2 + a^2]^{3/2}} \right) &= \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{\mu_1 P x}{[x^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{p_2 x}{[x^2 + a^2]^{3/2}} \right) - \alpha \frac{q x}{[x^2 + a^2]^{3/2}} \quad \forall x \\ \rightarrow P + \frac{p_1}{\mu_1} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} P + \frac{1}{\mu_2} p_2 - \alpha q \rightarrow \boxed{P \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) + \frac{p_1}{\mu_1} - \frac{p_2}{\mu_2} - \alpha q = 0} \end{aligned} \quad (32)$$

La condició frontera  $\mathbf{E}_{2\parallel} = \mathbf{E}_{1\parallel}$  resulta una identitat que no aporta res. Finalment la condició  $\mathbf{B}_{1\perp} = \mathbf{B}_{2\perp}$  amb  $\mathbf{B}_{\perp} = -\frac{\partial U}{\partial z}$  dóna lloc a:

$$\frac{\mu_1 P (z^0 - a)}{[x^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{p_1 (z^0 + a)}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{\mu_1 P (z^0 - a)}{[x^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{p_2 (z^0 - a)}{[x^2 + a^2]^{3/2}} \rightarrow \boxed{p_1 = -p_2} \quad (33)$$

Combinant ara les eqs. (32) i (33), tenint en compte (31), trobem:

$$\begin{aligned} P \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) + p_1 \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + \frac{\alpha^2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} (p_1 - \mu_1 P) &= 0 \\ \rightarrow P \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\alpha^2 \mu_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) + p_1 \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\alpha^2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) &= 0 \\ \rightarrow p_1 = -P \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} - \mu_1 \frac{\alpha^2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\alpha^2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \rightarrow \boxed{p_1 = -\mu_1 P \frac{\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \frac{\alpha^2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\alpha^2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}} \end{aligned} \quad (34)$$

Fixem-nos que si el medi no és topològic, aleshores  $\alpha = 0$  amb la qual cosa obtenim  $p_1 = -\mu_1 P \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$  que és la imatge d'un monopòl en front d'un medi ordinari.

Incorporant la fórmula de  $p_1$  obtinguda, eq. (34) en la de la càrrega  $q$ , eq. (31), trobem:

$$q = \frac{\alpha}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \mu_1 P \left( \frac{\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} + \frac{\alpha^2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}{\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{\alpha^2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} - 1 \right) \quad (35)$$

Reescrivim les eqs. (34) i (35) de manera més ordenada:

$$\boxed{p_1 = -\mu_1 P \frac{\left( \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (\epsilon_1 + \epsilon_2) - \alpha^2}{\left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) (\epsilon_1 + \epsilon_2) + \alpha^2}} \quad (36)$$

$$\boxed{q = -\alpha \frac{2P}{\left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) (\epsilon_1 + \epsilon_2) + \alpha^2}} \quad (37)$$

en perfecta analogia amb la imatge de la càrrega, amb el detall que la imatge  $q$  de la càrrega  $Q$ , eq. (21), és proporcional a  $(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2})(\epsilon_1 - \epsilon_2)$  mentre que la imatge  $p$  del monopol  $P$ , eq. (37), és proporcional a  $(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2})(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ . Constants dielèctriques i permeabilitats magnètiques s'han permutat.

### Exercici

Considerem una càrrega situada en la zona central d'un pou quàntic format per un aïllant topològic envoltat d'aïllant ordinari. (a) Calculeu el potencial elèctric que se genera en la zona central, cas que l'aïllant de la zona centre siga ordinari, com les barreres que l'envolten. Comprova que el resultat concorda amb les equacions (2.8) i (2.14) de Kumagai i Takagahara.[16] (b) Calculeu els potencial elèctrics i magnètics considerant que l'aïllant de la zona centre és topològic. Comproveu que en fer  $\alpha = 0$  el potencial magnètic se fa zero i l'elèctric coincideix amb l'obtingut a l'apartat anterior.

### Referències

- [1] B. Andrei Bernevig, Taylor L. Hughes, and Shou-Cheng Zhang, *Science* 314 (2006) 1757.
- [2] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987) 1799.
- [3] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 40 (1978) 279.
- [4] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 40 (1978) 223.
- [5] X-L Qi and S-C Zhang, *Physics Today* 63 (2010) 33.
- [6] M. M. Vazifeh and M. Franz, *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013) 027201.
- [7] T. H. O'Dell, *The electrodynamics of magneto-electric media*, American Elsevier Pub. Co., New York 1970.
- [8] Veure e.g. secció 3, després de l'eq. 62 en X-L Qi and S-C Zhang, *Rev. Mod. Phys.* 83 (2011) 1057.
- [9] La densitat d'energia electromagnètica  $W = \frac{1}{2\mu}B^2 + \frac{1}{2}\epsilon E^2$  pot ser formalment identificada amb un oscil·lador harmònic de moment lineal  $B$ , massa  $\mu$ , coordenada  $E$  i constant de força  $\epsilon$ , de manera que l'energia és suma de l'energia cinètica  $T$  més la potencial  $V$ . Per conveni se defineix la Lagrangiana  $\mathcal{L} = T - V$ , però pot igualment ser definida amb signe canviat  $\mathcal{L} = V - T = \frac{1}{2}\epsilon E^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu}B^2$  perquè tant una com altra definició condueixen a la mateixa equació d'Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) = 0$ .
- [10] C. Civelek and T. F. Bechteler, *Int. J. of Eng. Sci.* 46 (2008) 1218.
- [11] El delta de Dirac se defineix com la derivada de la funció de Heaviside,  $\{H(z > 0) = 1, H(z < 0) = 0\}$ :  $\delta(z) = \frac{d}{dz}H(z)$ . Com  $\theta = \pi H(z_0)$ , trobem que  $\frac{d\theta}{dz} = \pi \frac{dH}{dz} = \pi \delta(z_0)$  i aleshores  $\nabla\theta = \pi\delta(z_0)\mathbf{n}$ .
- [12] A. Sekine and K. Nomura, *J. Appl. Phys.* 129 (2021) 141101.
- [13] L. Visinelli, *Mod. Phys. Lett. A* 28 (2013) 135062.
- [14] A efectes de càlcul de càrregues d'imatge, en que se fa ús de les equacions (7) i (8), la modificació de Visinelli[13] no canvia les coses.
- [15] X-L Qi, R. Li, J. Zang and S-C Zhang, *Science* 329 (2009) 1184.
- [16] M. Kumagai and T. Takagahara, *Phys. Rev. B* 40 (1989) 12359.

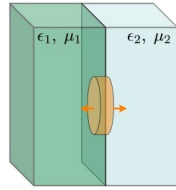
## 4 Apèndix 1: Condicions frontera en la interfase d'aïllants ordinaris

Les equacions de Maxwell en forma integral (i sistema racional MKS) són:

$$\begin{aligned} \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint \rho \, dv & \iint \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv = 0 & \iint \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} &= \oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \iint \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (38)$$

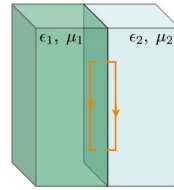
Si considerem independència del temps, les dues darreres equacions que inclouen derivades temporal se simplifiquen, de manera que les equacions de Maxwell queden en la forma

$$\begin{aligned} \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint \rho \, dv & \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= 0 \\ \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 & \oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (39)$$



$$D_{2\perp} = D_{1\perp} + \sigma$$

$$B_{2\perp} = B_{1\perp}$$



$$E_{2\parallel} = E_{1\parallel}$$

$$H_{2\parallel} = H_{1\parallel} + \vec{J}_s$$

En la part esquerra de la Figura mostrem un pastilla d'àrea  $\Delta S$  i alçada infinitesimal  $dx$ . La integral  $\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  la escrivim:

$$0 = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) \Delta S = (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} \Delta S \rightarrow \boxed{\mathbf{B}_{2\perp} = \mathbf{B}_{1\perp}}$$

Anàlogament,  $\iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \Delta S$ . Per una altra banda  $\iiint \rho \, dv = \iiint \rho \, dx \Delta S = \sigma \Delta S$ . Per tant,

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma \rightarrow \boxed{\mathbf{D}_{2\perp} = \mathbf{D}_{1\perp} + \sigma}$$

En la part dreta de la figura hi ha dibuixada una circulació en forma de rectangle de costat llarg  $\Delta \ell$  i costat estret infinitesimal  $dx$ . La circulació del camp elèctric  $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$  en aquest circuit queda

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta \boldsymbol{\ell} \rightarrow \boxed{\mathbf{E}_{2\parallel} = \mathbf{E}_{1\parallel}}$$

Anàlogament,  $\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \Delta \boldsymbol{\ell}$ . Tanmateix,  $\iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{J} \cdot (dx \Delta \boldsymbol{\ell}) \boldsymbol{\tau} = (\int \mathbf{J} dx) \cdot \boldsymbol{\tau} \Delta \boldsymbol{\ell} = \mathbf{J}_s \Delta \boldsymbol{\ell}$ , on  $\mathbf{J}_s$  representa el corrent superficial en la interfase. Aleshores:

$$\boxed{\mathbf{H}_{2\parallel} = \mathbf{H}_{1\parallel} + \mathbf{J}_s}$$

### 4.1 Condicions frontera en la interfase d'aïllants ordinaris en a.u.

Les equacions de Maxwell en forma diferencial i a.u. són

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (\text{Llei de Gauss}) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Llei de Faraday})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Llei de Gauss per al magnetisme}) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (\text{Llei d'Ampere})$$

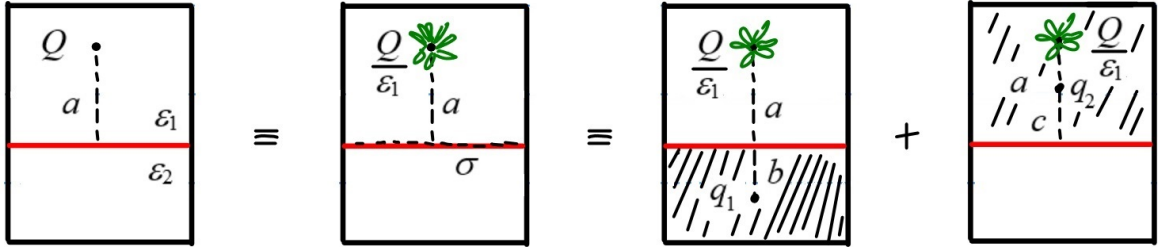
Per tant, cal afegir  $4\pi$  a la condició frontera per a  $\mathbf{D}$  i  $\frac{4\pi}{c}$  a la condició frontera per a  $\mathbf{H}$ :

$$\boxed{\mathbf{D}_{2\perp} = \mathbf{D}_{1\perp} + 4\pi\sigma}$$

$$\boxed{\mathbf{H}_{2\parallel} = \mathbf{H}_{1\parallel} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s}$$

## 5 Apèndix 2: Mètode d'imatges en electrostàtica

Considerem una càrrega  $Q$  en un medi de constant dielèctrica  $\epsilon_1$ . La càrrega  $Q$  polaritza el medi. Si el medi és infinit el resultat és que la càrrega  $Q$  i el medi conjuntament generen el mateix camp elèctric que una càrrega efectiva  $Q/\epsilon_1$  al buit. Si hi ha una interfase que separa dos medis de diferent polaritzabilitat, i.e., de diferent constant dielèctrica (vegeu la figura), contra la superfície del medi superior apareixen els extrems inferiors de la darrera làmina de dipols format en aquest medi que no se compensen amb la primera làmina de dipols que se generen en el medi inferior, atès que els medis tenen diferent polaritzabilitat. El resultat és que la càrrega  $Q$  situada a una distància  $a$  de la interfase i els dos medis generen el mateix camp que el que generen al buit una càrrega efectiva  $Q/\epsilon_1$  ubicada on hi ha la càrrega  $Q$  més una densitat superficial  $\sigma$  situada en la interfase entre els medis. Tanmateix, la distribució de càrrega  $\sigma$  genera en el medi superior el mateix camp que el que generaria una càrrega  $q_1$  situada simètricament en el medi inferior a una distància  $b$ , mentre que en el medi inferior genera el mateix camp que el que generaria una càrrega  $q_2$  situada en la mateixa vertical que  $Q$  (per motius de simetria) a una distància  $c$  de la interfase.



El potencial elèctric en el medi superior  $V(z > 0)$  és el produït per les càrregues  $Q/\epsilon_1$  situada a  $z_Q = a$  i  $q_1$  situada a  $z_{q_1} = -b$ :

$$V(z > 0) = \frac{Q/\epsilon_1}{[x^2 + (z - a)^2]^{1/2}} + \frac{q_1}{[x^2 + (z + b)^2]^{1/2}} \quad (40)$$

El potencial elèctric en el medi inferior  $V(z < 0)$  és el produït per les càrregues  $Q/\epsilon_1$  situada a  $z_Q = a$  i  $q_2$  situada a  $z_{q_2} = c$ :

$$V(z < 0) = \frac{Q/\epsilon_1}{[x^2 + (z - a)^2]^{1/2}} + \frac{q_2}{[x^2 + (z - c)^2]^{1/2}} \quad (41)$$

Per determinar els valors  $b, c, q_1, q_2$  apliquem les condicions frontera obtingudes a l'apèndix 1. De la condició frontera  $\mathbf{E}_{2\parallel} = \mathbf{E}_{1\parallel}$ , amb  $\mathbf{E}_{\parallel} = -\frac{\partial V}{\partial x}$  trobem:

$$\mathbf{E}_{1\parallel}(z > 0) = \frac{Q}{\epsilon_1} \frac{x}{[x^2 + (z - a)^2]^{3/2}} + q_1 \frac{x}{[x^2 + (z + b)^2]^{3/2}} \quad (42)$$

$$\mathbf{E}_{2\parallel}(z < 0) = \frac{Q}{\epsilon_1} \frac{x}{[x^2 + (z - a)^2]^{3/2}} + q_2 \frac{x}{[x^2 + (z - c)^2]^{3/2}} \quad (43)$$

Igalant les dues equacions en  $z = 0$  trobem que:

$$\frac{q_1}{[x^2 + b^2]^{3/2}} = \frac{q_2}{[x^2 + c^2]^{3/2}} \rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{[x^2 + b^2]^{3/2}}{[x^2 + c^2]^{3/2}} \quad (44)$$

Com la fracció  $\frac{q_1}{q_2}$  és una constant, calque ho siga també la fracció  $\frac{[x^2 + b^2]^{3/2}}{[x^2 + c^2]^{3/2}}$ , cosa que obliga a que  $b = c$  i, en conseqüència, que  $q_1 = q_2$ .

A partir de  $b = c$ ,  $q_1 = q_2 = q$ , de la condició frontera  $\mathbf{D}_{2\perp} = \mathbf{D}_{1\perp} + \sigma$ , tenint en compte que no hi ha càrrega superficial lliure ( $\sigma = 0$ ), i que  $\mathbf{D}_{\perp} = \epsilon \mathbf{E}_{\perp}$ , amb  $\mathbf{E}_{\perp} = -\frac{\partial V}{\partial z}$  trobem:

$$\mathbf{E}_{1\perp}(z > 0) = \frac{Q}{\epsilon_1} \frac{z - a}{[x^2 + (z - a)^2]^{3/2}} + q \frac{z + b}{[x^2 + (z + b)^2]^{3/2}} \quad (45)$$

$$\mathbf{E}_{2\perp}(z < 0) = \frac{Q}{\epsilon_1} \frac{z - a}{[x^2 + (z - a)^2]^{3/2}} + q \frac{z - b}{[x^2 + (z - b)^2]^{3/2}} \quad (46)$$

Igualant  $\epsilon_1 \mathbf{E}_{1\perp} = \epsilon_2 \mathbf{E}_{2\perp}$  en  $z = 0$  trobem que:

$$-Q \frac{a}{[x^2 + a^2]^{3/2}} + \epsilon_1 q \frac{b}{[x^2 + b^2]^{3/2}} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} Q \frac{a}{[x^2 + a^2]^{3/2}} - \epsilon_2 q \frac{b}{[x^2 + b^2]^{3/2}} \quad (47)$$

Agrupant factors:

$$Q \left(1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) \frac{a}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = q(\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{b}{[x^2 + b^2]^{3/2}} \rightarrow \frac{1}{\epsilon_1} Q \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) a}{q(\epsilon_1 + \epsilon_2) b} = \frac{[x^2 + a^2]^{3/2}}{[x^2 + b^2]^{3/2}} \quad (48)$$

que, com el primer terme és una constant, també ha de ser-ho el segon, cosa que obliga a que  $a = b$ , resultat que comporta:

$$q = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} Q \quad (49)$$

En resum, El potencial elèctric que crea una càrrega  $Q$  en un medi de constant dielèctrica  $\epsilon_1$  situada a una distància  $a$  de la interfase en un altre medi de constant dielèctrica  $\epsilon_2$  en el medi on se troba és igual al que genera en el buit una càrrega efectiva  $Q^* = Q/\epsilon_1$  ubicada on hi ha la càrrega  $Q$  més el que genera una càrrega imatge  $q = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} Q$  situada simètricament en l'altre medi a la mateixa distància de la interfase. Tanmateix,  $Q$  genera en l'altre medi un potencial com el que genera en el buit una càrrega efectiva  $Q^* = Q/\epsilon_1$  més una càrrega efectiva  $q = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} Q$  totes dos situades en la posició de la càrrega  $Q$ .

