

1. Considerem la representació matricial $\mathbb{T} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$ d'un operador $\hat{T}$ amb dimensions d'energia ($\hbar\omega$).
- Comproveu que $\mathbb{T}$ és hermítica
 - Trobeu els seus autovalors (adoneu-vos que són reals)
 - Calculeu els seus autovectors normalitzats (adoneu-vos que són ortogonals)
 - S'ha fet una mesura de la magnitud física $\mathcal{T}$ en un estat representat pel vector columna $|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quins valors T s'obtingrien i amb quines probabilitat?

(a) $\mathbb{T}^\dagger = \mathbb{T}$ (b) $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1-i \\ 1+i & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - |1+i|^2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2+a(1-i)=0 \rightarrow a = -\frac{2}{1-i} \frac{1+i}{1+i} = -1-i \rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1-i \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -1+a(1-i)=0 \rightarrow a = \frac{1}{1-i} \frac{1+i}{1+i} = \frac{1}{2}(1+i) \rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$

(c) $v = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $\lambda = -1$ $P_1 = \left| \langle 1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2} | \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1-i \end{bmatrix} \right|^2 = \frac{1}{6} |1-1-i|^2 = \frac{1}{6}$

$\lambda = 2$ $P_2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right|^2 = \frac{1}{3} |1-\frac{1-i}{2}|^2 = \frac{5}{6}$ } suma 1

2. Una partícula es troba en un estat del qual sabem que:

- en mesurar la seua energia sols s'obtenen els valors 1, 2 i 4
- el valor mitjà de l'energia és 2
- la desviació quadràtica de l'energia és $\sqrt{3/2}$

Quina és la probabilitat que en mesurar l'energia obtinguem el valor 1? I amb quina obtindríem el valor 4?

$E_i = 1, 2, 4$ $c_i^2 \rightarrow a$ $a+b+c=1$ $\rightarrow a-2c=0 \rightarrow a=2c$

$\langle E \rangle = 2$ $c_i^2 \rightarrow b$ $a+2b+4c=2$ $b+3c=1 \rightarrow b=1-3c$

$\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \sigma^2 = \frac{3}{2}$ $c_i^2 \rightarrow c$ $a+4b+16c=4 = \frac{3}{2}$ $2c+4-12c+16c = \frac{11}{2} \rightarrow c = \frac{1}{4}$ $a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{1}{4}$ } suma 1

$\rightarrow \text{Prob}(E=1) = 1/2$; $\text{Prob}(E=4) = 1/4$

3. L'observable $\mathcal{A}$ ve representat per la matriu $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Quin és el valor de b ?
- quina és la probabilitat d'obtenir el valor 1 en mesurar $\mathcal{A}$ en l'estat representat pel vector $|v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? i quina és la probabilitat d'obtindre el valor 2?

(a) $b = -i$ per ser $\mathbb{A}$ hermítica (b) $\begin{bmatrix} 2-\lambda & i & 0 \\ -i & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda) - (2-\lambda) + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0$ per inspecció $\lambda = 1$

$\frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2}{\lambda - 1} = \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{3}$ $\rightarrow \lambda \neq 2 \Rightarrow \text{Prob}[\lambda=2] = 0$

si $\lambda = 1$ $\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 1+ia=0 \rightarrow a=i$ $\rightarrow -i+b=0 \rightarrow b=i$ $v = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Prob}[\lambda=1] = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ 1 \ 0) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} \right|^2 = \frac{1}{6} |1+i|^2 = \frac{1}{3}$

4. Demostreu que si una funció quadràticament integrable és real, aleshores, el valor mitjà del moment $\langle \hat{p} \rangle$ és zero.

$\psi \in \mathbb{R}$ $\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} \psi dx = (-i\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = -\frac{i\hbar}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi^2}{\partial x} dx = -\frac{i\hbar}{2} [\psi^2]_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{i\hbar}{2} (0-0) = 0$

5. L'hamiltonià d'una partícula en una dimensió és $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ i siga $u(x)$ una autofunció amb energia E .

- Demostreu que $\langle u | [\hat{H}, \hat{A}] | u \rangle = 0$, on $\hat{A}$ és qualsevol operador
- Considereu el cas particular que $\hat{A}$ és l'operador posició x i demostreu que $\langle \hat{p} \rangle = 0$

$$(a) \langle u | [\hat{H}, \hat{A}] | u \rangle = \langle \hat{H} \hat{A} | u \rangle - \langle \hat{A} \hat{H} | u \rangle = E (\langle u | \hat{A} | u \rangle - \langle u | \hat{A} | u \rangle) = 0$$

$$(b) A=x, [\hat{H}, x] = [\frac{p^2}{2m}, x] = \frac{1}{2m} (p^2 x - x p^2); \quad p x - x p = -i\hbar; \Rightarrow [\hat{H}, x] = \frac{1}{2m} (p(xp - i\hbar) - (px + i\hbar)p) = \frac{1}{2m} (-2i\hbar) \hat{p}$$

$$\text{com } \langle u | [\hat{H}, x] | u \rangle = 0 \rightarrow \langle u | \hat{p} | u \rangle = 0$$

- 6.
- Demostreu que el valor mitjà $\langle [\hat{L}_z, \hat{L}_x \hat{L}_y] \rangle$ en qualsevol estat propi d' $\hat{L}_z$ és zero.
 - A partir d'aquest resultat dedueu, avaluant $[\hat{L}_z, \hat{L}_x \hat{L}_y]$, que en qualsevol estat propi d' $\hat{L}_z$ resulta que $\langle \hat{L}_x^2 \rangle = \langle \hat{L}_y^2 \rangle$.
 - Considereu $|\ell, m\rangle$, una autofunció d' $\hat{L}_z$ i $\hat{L}^2$. Comproveu que $\langle \hat{L}_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 [\ell(\ell+1) - m^2]$

$$(a) \langle M | \hat{L}_z, \hat{L}_x \hat{L}_y | M \rangle = \langle M | \hat{L}_z \hat{L}_x \hat{L}_y | M \rangle - \langle M | \hat{L}_x \hat{L}_y \hat{L}_z | M \rangle = M (\langle M | \hat{L}_x \hat{L}_y | M \rangle - \langle M | \hat{L}_x \hat{L}_y | M \rangle) = 0$$

$$(b) \left. \begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i\hbar \hat{L}_y \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= -i\hbar \hat{L}_x \end{aligned} \right\} \quad \hat{L}_z \hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_x \hat{L}_y \hat{L}_z = (\hat{L}_x \hat{L}_z \hat{L}_y + i\hbar \hat{L}_y^2) - (\hat{L}_x \hat{L}_z \hat{L}_y + i\hbar \hat{L}_x^2) = i\hbar (\hat{L}_y^2 - \hat{L}_x^2)$$

$$\text{com } \langle M | [\hat{L}_z, \hat{L}_x \hat{L}_y] | M \rangle = 0 \hookrightarrow i\hbar \langle M | \hat{L}_y^2 - \hat{L}_x^2 | M \rangle = 0 \rightarrow \langle M | \hat{L}_x^2 | M \rangle = \langle M | \hat{L}_y^2 | M \rangle$$

$$(c) \langle \hat{L}^2 \rangle = \ell(\ell+1) \hbar^2 = \langle \hat{L}_x^2 \rangle + \langle \hat{L}_y^2 \rangle + \langle \hat{L}_z^2 \rangle \underset{M^2 \hbar^2}{=} \approx M^2 \hbar^2 + 2 \langle \hat{L}_x^2 \rangle \rightarrow \langle \hat{L}_x^2 \rangle = \langle \hat{L}_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 [\ell(\ell+1) - M^2]$$

7. Tenim un estat $|\ell, m\rangle$ del que sabem que $\langle \ell m | (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2) | \ell m \rangle = 2$ (considerem $\hbar = 1$ a.u.) quina, entre les següents respostes és correcta: (A) $\ell = 2, m = 0$ (B) $\ell = 3, m = 0$ (C) $\ell = 1, m = 1$ (D) $\ell = 2, m = -2$

$$\langle \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 \rangle = \langle \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \rangle = \ell(\ell+1) - m^2 = 2 \quad : \quad A, B, C \text{ no són possibles, D sí}$$

8. En calcular $\langle \ell \ell | (\hat{L}_+ \hat{L}_-)^2 | \ell \ell \rangle$ (tria la resposta correcta) trobem A: $4\ell^2 \hbar^4$; B: 0; C: $\ell^2(\ell+1)^2 \hbar^4$; D: $\ell^2 \hbar^4$.

$$\langle \ell \ell | \hat{L}_+ \hat{L}_- \hat{L}_+ \hat{L}_- | \ell \ell \rangle; \quad \hat{L}_\pm | \ell m \rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)} | \ell, m\pm 1 \rangle$$

$$\sqrt{\ell(\ell+1) - \ell(\ell-1)} \sqrt{\ell(\ell+1) - (\ell-1)\ell} \sqrt{\ell(\ell+1) - \ell(\ell-1)} \sqrt{\ell(\ell+1) - (\ell-1)\ell} = [\ell(\ell+1) - \ell(\ell-1)]^2 = [\cancel{\ell^2} + \ell - \cancel{\ell^2} + \ell]^2 = 4\ell^2 \rightarrow \boxed{A}$$

9. Sabem que $\Psi(\theta, \phi) = \frac{3Y_1^1 + 4Y_7^3 + Y_7^1}{\sqrt{26}}$ Quins valors de L i L_z se trobaran en fer una mesura d'aquestes magnituds i amb quina probabilitat se trobarà cadascun dels possibles valors.

$$\ell = 1 \quad P_r = \frac{9}{26}; \quad \ell = 7 \quad P_r = \frac{16}{26} + \frac{1}{26} = \frac{17}{26}; \quad M = 1 \quad P_r = \frac{9}{26} + \frac{1}{26}; \quad M = 3 \quad P_r = \frac{16}{26}$$

10. Una partícula, sotmesa a un potencial central, es troba en un estat no normalitzat $\Psi(x, y, z) = (x+y+z) \exp[-r^2/(2b^2)]$. Quan val el valor mitjà del quadrat del mòdul del moment angular en aquest estat? Tria la resposta entre: $6\hbar^2, 0, \hbar^2, 2\hbar^2$.

$$\text{Dades: } Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_1^{\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$\underbrace{(x+y+z)}_{\substack{\ell=1 \\ \sin\theta, \cos\theta, e^{\pm i\phi}}} \exp(-r^2/2b^2) \Rightarrow \ell=1 \Rightarrow \langle \hat{L}^2 \rangle = 1(1+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$$

no depen dels angles

11. Un electró se troba en un estat no normalitzat $|k\rangle = (1+i)|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Avalueu $\langle \hat{S}_x \rangle$ en aquest estat. La solució és una dels quatre valors següents $\hbar/2, 0, -\hbar/2, \hbar/3$ (no se facilita cap ajuda addicional).

$$|k\rangle = (1+i)\alpha + \beta \quad ; \quad S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \quad ; \quad S_+\alpha = S_-\beta = 0 \quad ; \quad S_+\beta = \alpha \quad ; \quad S_-\alpha = \beta$$

$$[(1-i)\langle\alpha| + \langle\beta|] \frac{1}{2}(S_+ + S_-) [(1+i)|\alpha\rangle + |\beta\rangle] = \frac{1}{2} \left\{ (1-i) \langle\alpha| \overset{1}{S_+} |\beta\rangle + (1+i) \langle\beta| \overset{1}{S_-} |\alpha\rangle + 0 + 0 \right\} = 1$$

però $|k\rangle$ no està normalitzat. La norma $\sqrt{1+2} = \sqrt{3} \rightarrow \boxed{\langle S_x \rangle = \frac{1}{3}}$

12. En un estat $|jm\rangle$ la integral $\langle jm | (\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2) | jm \rangle = 2$ (agafant $\hbar = 1$ a.u.). Quina entre les següents respostes és correcta: A: $j = 2, m = 0$; B: $j = 3/2, m = 1/2$; C: $j = 1, m = 1$; D: $j = 2, m = -2$;

$$j(j+1) - m^2 = 2 \Rightarrow A, B, C \text{ no són possibles, D sí.}$$

13. Considerem un estat $|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|u_3\rangle$, on $|u_n\rangle$ són autofuncions normalitzades d'un operador $\hat{B}$ amb autovalors $b_n = (3n^2 - 1)$. Calculeu el valor mitjà $\langle v | \hat{B} | v \rangle$ de $\hat{B}$ en aquest estat. Calculeu també el valor mitjà $\langle v | \hat{B}^2 | v \rangle$.

$$|v\rangle \text{ no està normalitzat} \rightarrow \text{l'estat normalitzat } |v^N\rangle = \frac{\sqrt{15}}{9} |v\rangle \rightarrow c_1^2 = \frac{1}{9} ; |c_2|^2 = \frac{15}{27} ; c_3^2 = \frac{1}{3} \quad (\text{suma } 1)$$

$$\rightarrow \langle B \rangle = \frac{1}{9} \cdot 2 + \frac{15}{27} \cdot 11 + \frac{1}{3} \cdot 26 \quad ; \quad \langle B^2 \rangle = \frac{1}{9} \cdot 4 + \frac{15}{27} \cdot 11^2 + \frac{1}{3} \cdot 26^2$$

14. L'estat d'un sistema ve descrit per $\Psi = \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} + aY_1^1 + \frac{i}{2}Y_1^{-1} + \frac{1}{\sqrt{6}}Y_2^2$

- Calculeu la constant a que fa que la funció estiga normalitzada
- Troba les probabilitats de trobar $0, \hbar, -\hbar, -2\hbar$ en mesurar $\hat{L}_z$
- Imaginem que en mesurar $\hat{L}_z$ trobem $\hbar$: en quin estat se trobarà el sistema després de la mesura?

$$(a) \text{ La funció } Y_0^0 : \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_0^0|^2 \sin\theta d\theta d\phi = 1 \rightarrow |Y_0^0|^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = |Y_0^0|^2 4\pi = 1 \rightarrow Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\rightarrow \Psi = \frac{1}{2}Y_0^0 + aY_1^1 + \frac{i}{2}Y_1^{-1} + \frac{1}{\sqrt{6}}Y_2^2 \rightarrow \frac{1}{4} + a^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 1 \rightarrow a = 1/\sqrt{3}$$

$$(b) \quad P_r(L_z=0) = \frac{1}{4} \quad P_r(L_z=\hbar) = \frac{1}{3} \quad P_r(L_z=-\hbar) = \frac{1}{4} \quad P_r(L_z=\hbar) = \frac{1}{4} \rightarrow P_r(L_z=-2\hbar) = 0$$

$$(c) \text{ en } Y_1^1$$

15. L'hamiltonià $\hat{H}$ i l'operador $\hat{A}$ venen representats per les matrius:

$$\mathbb{H} = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbb{A} = a \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on ϵ té dimensions d'energia.

- Quin valors possibles obtindrem en mesurar l'energia?
- Imaginem que en mesurar l'energia obtenim $-\epsilon$. Immediatament mesurem $\hat{A}$. Quins valors obtindríem i amb quines probabilitats?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{array} \right) = -(1+\lambda) [(1-\lambda)^2 - 1] = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda(\lambda-2) = 0 \rightarrow \lambda = 0, \lambda = 2 \end{cases}$$

(a) $E = 0, -\epsilon, 2\epsilon$ (b) si $E = -\epsilon \rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda + 16\lambda = 0 \rightarrow \lambda(17 - \lambda^2) = 0 \rightarrow \lambda = 0, \pm\sqrt{17} \rightarrow A = 0, \pm a\sqrt{17}$$

$$\begin{aligned} A=0 & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 4a=0 \\ 4+b=0 \rightarrow b=-4 \end{matrix} \quad \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \rightarrow P_r = |(0 \ 0 \ 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}|^2 = \frac{16}{17} \\ A=a\sqrt{17} & \begin{pmatrix} -\sqrt{17} & 4 & 0 \\ 4 & -\sqrt{17} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{17} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -\sqrt{17}+4a=0 \rightarrow a=\frac{\sqrt{17}}{4} \\ a-\sqrt{17}b=0 \rightarrow b=\frac{1}{4} \end{matrix} \quad \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 4 \\ \sqrt{17} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow P_r = |(0 \ 0 \ 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 4 \\ \sqrt{17} \\ 1 \end{bmatrix}|^2 = \frac{1}{34} \\ A=-a\sqrt{17} & \begin{pmatrix} \sqrt{17} & 4 & 0 \\ 4 & \sqrt{17} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{17} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \sqrt{17}+4a=0 \rightarrow a=-\frac{\sqrt{17}}{4} \\ a+\sqrt{17}b=0 \rightarrow b=\frac{1}{4} \end{matrix} \quad \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 4 \\ -\sqrt{17} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow P_r = |(0 \ 0 \ 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 4 \\ -\sqrt{17} \\ 1 \end{bmatrix}|^2 = \frac{1}{34} \end{aligned}$$

$\left\{ \frac{16}{17} + \frac{2}{34} = 1 \text{ ok.} \right.$

16. Considereu un sistema en un estat $|v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Considereu la representació matricial de dos observables

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

- És sempre possible el coneixement simultani de les magnituds $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ associades?
- És cert o fals que en mesurar $\mathcal{B}$ en l'estat $|v\rangle$ dona com a resultat el valor 1 amb una probabilitat $1/17$? Justifica la resposta.

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow [\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0 \Rightarrow \exists \text{ un conjunt complet de funcions pròpies comunes} \rightarrow \text{si}$$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ autovalors $\lambda = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\rightarrow P_r = \left| \frac{1}{\sqrt{17}} (1 \ 0 \ 4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right|^2 = \frac{1}{17}$

$\lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = -1$ $\begin{bmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -1-ia=0 \\ a=i \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_r = \left| \frac{1}{\sqrt{17}} (1 \ 0 \ 4) \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right|^2 = \frac{9}{17}$

$\lambda = -1 \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1-ia=0 \\ a=-i \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\left\{ P_r[\lambda=1] = \frac{9}{17} \right\}$
FALS