

Problemes de repàs de resolució no trivial o merament procedimental

- Considerem la representació matricial $\mathbb{T} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$ d'un operador $\hat{\mathcal{T}}$ amb dimensions d'energia ($\hbar\omega$).
 - Comproveu que $\mathbb{T}$ és hermitica
 - Trobeu els seus autovalors (adoneu-vos que són reals)
 - Calculeu els seus autovectors normalitzats (adoneu-vos que són ortogonals)
 - S'ha fet una mesura de la magnitud física $\mathcal{T}$ en un estat representat pel vector columna $|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quins valors T s'obtinguerien i amb quines probabilitat?
- Una partícula es troba en un estat del qual sabem que:
 - en mesurar la seua energia sols s'obtenen els valors 1, 2 i 4
 - el valor mitjà de l'energia és 2
 - la desviació quadràtica de l'energia és $\sqrt{3/2}$
 Quina és la probabilitat que en mesurar l'energia obtinguem el valor 1? I amb quina obtindríem el valor 4?
- L'observable $\mathcal{A}$ ve representat per la matriu $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Quin és el valor de b ?
 - quina és la probabilitat d'obtenir el valor 1 en mesurar $\mathcal{A}$ en l'estat representat pel vector $|v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? i quina és la probabilitat d'obtindre el valor 2?
- Demostreu que si una funció quadràticament integrable és real, aleshores, el valor mitjà del moment $\langle \hat{p} \rangle$ és zero.
- L'hamiltonià d'una partícula en una dimensió és $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ i siga $u(x)$ una autofunció amb energia E .
 - Demostreu que $\langle u | [\hat{H}, \hat{A}] | u \rangle = 0$, on $\hat{A}$ és qualsevol operador
 - Considereu el cas particular que $\hat{A}$ és l'operador posició x i demostreu que $\langle \hat{p} \rangle = 0$
- Demostreu que el valor mitjà $\langle [\hat{L}_z, \hat{L}_x \hat{L}_y] \rangle$ en qualsevol estat propi d' $\hat{L}_z$ és zero.
 - A partir d'aquest resultat dedueu, avaluant $[\hat{L}_z, \hat{L}_x \hat{L}_y]$, que en qualsevol estat propi d' $\hat{L}_z$ resulta que $\langle \hat{L}_x^2 \rangle = \langle \hat{L}_y^2 \rangle$.
 - Considereu $|\ell, m\rangle$, una autofunció d' $\hat{L}_z$ i $\hat{L}^2$. Comproveu que $\langle \hat{L}_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 [\ell(\ell+1) - m^2]$
- Tenim un estat $|\ell, m\rangle$ del que sabem que $\langle \ell m | (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2) | \ell m \rangle = 2$ (considerem $\hbar = 1$ a.u.) quina, entre les següents respostes és correcta: (A) $\ell = 2, m = 0$ (B) $\ell = 3, m = 0$ (C) $\ell = 1, m = 1$ (D) $\ell = 2, m = -2$
- En calcular $\langle \ell \ell | (\hat{L}_+ \hat{L}_-)^2 | \ell \ell \rangle$ (tria la resposta correcta) trobem A: $4\ell^2 \hbar^4$; B: 0 ; C: $\ell^2(\ell+1)^2 \hbar^4$; D: $\ell^2 \hbar^4$.
- Sabem que $\Psi(\theta, \phi) = \frac{3Y_1^1 + 4Y_7^3 + Y_7^1}{\sqrt{26}}$ Quins valors de L i L_z se trobaran en fer una mesura d'aquestes magnituds i amb quina probabilitat se trobarà cadascun dels possibles valors.
- Una partícula, sotmesa a un potencial central, es troba en un estat no normalitzat $\Psi(x, y, z) = (x+y+z) \exp[-r^2/(2b^2)]$. Quan val el valor mitjà del quadrat del mòdul del moment angular en aquest estat? Tria la resposta entre: $6\hbar^2, 0, \hbar^2, 2\hbar^2$. Dades: $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$, $Y_1^{\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$
- Un electró se troba en un estat no normalitzat $|k\rangle = (1+i)|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Avalueu $\langle \hat{S}_x \rangle$ en aquest estat. La solució és una dels quatre valors següents $\hbar/2, 0, -\hbar/2, \hbar/3$ (no se facilita cap ajuda addicional).
- En un estat $|jm\rangle$ la integral $\langle jm | (\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2) | jm \rangle = 2$ (agafant $\hbar = 1$ a.u.). Quina entre les següents respostes és correcta: A: $j = 2, m = 0$; B: $j = 3/2, m = 1/2$; C: $j = 1, m = 1$; D: $j = 2, m = -2$;

13. Considerem un estat $|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|u_3\rangle$, on $|u_n\rangle$ són autofuncions normalitzades d'un operador $\hat{B}$ amb autovalors $b_n = (3n^2 - 1)$. Calculeu el valor mitjà $\langle v|\hat{B}|v\rangle$ de $\hat{B}$ en aquest estat. Calculeu també el valor mitjà $\langle v|\hat{B}^2|v\rangle$.
14. L'estat d'un sistema ve descrit per $\Psi = \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} + aY_1^1 + \frac{i}{2}Y_1^{-1} + \frac{1}{\sqrt{6}}Y_2^2$
- Calculeu la constant a que fa que la funció estiga normalitzada
 - Troba les portabilitats de trobar $0, \hbar, -\hbar, -2\hbar$ en mesurar $\hat{L}_z$
 - Imaginem que en mesurar $\hat{L}_z$ trobem $\hbar$: en quin estat se trobarà el sistema després de la mesura?
15. L'hamiltonià $\hat{H}$ i l'operador $\hat{A}$ venen representats per les matrius:

$$\mathbb{H} = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbb{A} = a \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on ϵ té dimensions d'energia.

- Quin valors possibles obtindrem en mesurar l'energia?
 - Imaginem que en mesurar l'energia obtenim $-\epsilon$. Immediatament mesurem $\hat{A}$. Quins valors obtindríem i amb quines probabilitats?
16. Considereu un sistema en un estat $|v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Considereu la representació matricial de dos observables

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

- És sempre possible el coneixement simultani de les magnituds $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ associades?
- És cert o fals que en mesurar $\mathcal{B}$ en l'estat $|v\rangle$ dona com a resultat el valor 1 amb una probabilitat 1/17? Justifica la resposta.