Efecte Aharonov-Bhom: Corrents Persistents

JOSEP PLANELLES

Departament de Ciències Experimentals, Universitat Jaume I,

Apartat 224, E-12080 Castelló, Spain

Febrer 2005

Efecte Aharonov-Bhom: Corrents Persistents.

Considerem l'equació l'equació de Schrödinger,

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2\Psi + V\Psi \tag{1}$$

Si multipliquem per l'esquerra aquesta equació per Ψ^*, la seua complex conjugada per Ψ i restem obtenim:

$$i\hbar\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*\right) \tag{2}$$

Si tenim en compte que $\rho = e\Psi^*\Psi$, i aleshores,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = e\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} + \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) \tag{3}$$

i que,

$$\begin{aligned}\Psi^*\nabla(\nabla\Psi) - \Psi\nabla(\nabla\Psi^*) &= \Psi^*\nabla(\nabla\Psi) + \nabla\Psi\nabla\Psi^* - \nabla\Psi\nabla\Psi^* - \Psi\nabla(\nabla\Psi^*) &(4)\\ &= \nabla(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) &(5)\end{aligned}$$

concloem que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{e\hbar}{2mi}\nabla(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) = 0 \tag{6}$$

Per comparació amb l'equació de continuitat de càrrega, $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{\jmath} = 0$, trobem que la densitat de corrent la podem expressar:

$$\vec{\jmath} = \frac{e\hbar}{2mi}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*). \tag{7}$$

En presència de un camp magnètic, cal escriure l'equació 1 en la forma:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2\Psi + i\frac{e}{m}\hbar A\nabla\Psi + \frac{e^2}{2m}A^2\Psi + V\Psi \tag{8}$$

Procedint de manera anàloga a com ho haviem fet adès trobem que:

$$i\hbar\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*\right) + i\hbar A\frac{e}{m}(\Psi^*\nabla\Psi + \Psi\nabla\Psi^*) \tag{9}$$

Amb eq. 3, reescrivim aquesta equació en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{i\hbar}{e}\frac{\partial\rho}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + i\hbar A\frac{e}{m_e}\nabla(\Psi^*\,\Psi) && (10)\\
&= \nabla\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + i\hbar A\frac{e}{m_e}|\Psi|^2\right) && (11)\\
& && (12)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\hbar e}{2m_e i}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{e^2 A}{m_e}|\Psi|^2\right) = 0 \qquad (13)$$

Aleshores definim:

$$j_0 = \frac{\hbar e}{2m_e i}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) \qquad (14)$$

$$j_A = -\frac{e^2}{m_e}A|\Psi|^2. \qquad (15)$$

Per un altra banda, si escrivim l'hamiltonià en presència de camp magnètic en la forma

$$\mathcal{H} = \frac{(p-eA)^2}{2m_e} + V, \qquad (16)$$

on $(p - eA)$ és el moment cinemàtic (mentre que p és el moment canònic), i derivem respecte A, tenim que:

$$-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial A} = \frac{p-eA}{m_e}e = v\,e, \qquad (17)$$

on v és l'operador associat amb la velocitat.

Si considerem ara el cas d'un electró en un anell monodimensional de radi R, resulta que $ve = 2\pi r I$. Aleshores, com $\Phi = 2\pi R A$,

$$-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial A} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial A} = 2\pi R(-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi}), \qquad (18)$$

però també:

$$-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial A} = v\,e = 2\pi\,R\,I. \qquad (19)$$

En conseqüència,

$$-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi} = I, \qquad (20)$$

i en un estat estacionari,

$$I = -\frac{\partial E}{\partial\Phi}. \qquad (21)$$

Seguint en aquest cas d'un electró en una anell monodimensional de radi R, on la funció d'ona normalitzada completa l'escrivim[1] $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\delta(R-r)\delta(z)e^{iM\phi}$ i l'operador Nabla es resumeix a $\nabla = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}$, aleshores, $\Psi^*\nabla\Psi = \frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}e^{-iM\phi}(iM)\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}e^{iM\phi} = \frac{iM}{2\pi R^2}$. Análogament, $\Psi\nabla\Psi^* = -\frac{iM}{2\pi R^2}$. Finalment, $|\Psi|^2 = \frac{1}{2\pi R}$. Aleshores, en aquest cas,

$$j_0 = \frac{\hbar e}{2\pi m_e R^2}M, \tag{22}$$

$$j_A = -\frac{e^2}{2\pi m_e R}A. \tag{23}$$

Com resulta que en aquest problema d'un electró en un anell monodimensional $E_M = \frac{\hbar^2}{2m_e R^2}(M + \frac{\Phi}{\Phi_0})^2$, si recordem que $\Phi_0 = 2\pi\hbar/|e|$ i que $A = \Phi/(2\pi R)$, tenim que:

$$\frac{\partial E_M}{\partial\Phi} = \frac{\hbar^2}{2m_e R^2}2(M + \frac{\Phi}{\Phi_0})\frac{1}{\Phi_0} \tag{24}$$

$$= \frac{|e|\hbar}{2\pi m_e R^2}M + \frac{|e|e}{2\pi m_e R}A \tag{25}$$

Si comparem aquesta amb les equacions 22 i 23 retrobem l'eq. 21:

$$-\frac{\partial E_M}{\partial\Phi} = j_0 + j_A = I, \tag{26}$$

que relaciona el corrent en l'anell amb la variació de l'energia amb el flux[2]. La cosa més significativa de l'eq. 26 és que descriu com el corrent al llarg de l'anell varia amb el flux, encara que el camp magnètic que l'origina no actue directament sobre l'esmentat sistema. És a dir, hi ha fluctuacions de corrent amb el flux malgrat que cap força clàssica de Lorentz estiga actuant.

[1]Notem que aquesta funció està normalitzada: $\int |\Psi|^2 dv = \frac{1}{2\pi R}\int_0^\infty \delta(R-r)rdr \int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)dz \int_0^{2\pi} d\phi = 1$.

[2]Notem que en el cas monodimensional intensitat I i densitat de corrent j són la mateixa cosa.