In[44]:= (*Normalització de la funció:*)

$\text{Solve}\left[N^2 \int_0^1 x\,(1-x)\,x\,(1-x)\,dx == 1,\ N\right]$

Out[44]= $\{\{N \to -\sqrt{30}\},\ \{N \to \sqrt{30}\}\}$

(*Triem la solució positiva i determinem el coeficients que permeten l' expansió d' aquesta funció en la base completa de funcions de la partícula en la caixa $\{\sqrt{2}\ \text{Sin}[n\ \pi\ x],\ n=1,2,3,....\}$*)

In[1]:= $c[n\_] = \int_0^1 \sqrt{30}\ x\,(1-x)\ \sqrt{2}\ \text{Sin}[n\,\pi\,x]\,dx$

Out[1]= $-\frac{2\sqrt{15}\ (-2 + 2\,\text{Cos}[n\,\pi] + n\,\pi\,\text{Sin}[n\,\pi])}{n^3\,\pi^3}$

(* Determinem la forma compacta que presenten aquests coeficients *)

In[2]:= $d[n\_] = c[n] \big/ \sqrt{15}$; Print [d[1], d[2], d[3], d[4], d[5]]

$\frac{8}{\pi^3}\ 0\ \frac{8}{27\,\pi^3}\ 0\ \frac{8}{125\,\pi^3}$

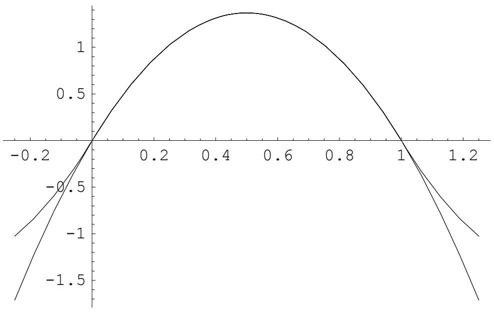
$\frac{8}{\pi^3}\ 0\ \frac{8}{27\,\pi^3}\ 0\ \frac{8}{125\,\pi^3}$ -------- > $c[2\,n+1] = \frac{8\sqrt{15}}{(2\,n+1)^3\,\pi^3}$

(* L' expansió és doncs *)

In[26]:= ClearAll[f, c, d]; $f[x\_] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\sqrt{30}}{(2\,n+1)^3\,\pi^3}\ \text{Sin}[(2\,n+1)\,\pi\,x]$

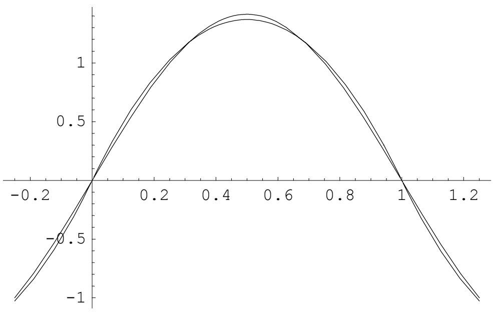
Out[26]= $-\frac{1}{\pi^3}\left(i\sqrt{\frac{15}{2}}\ e^{-i\pi x}\left(8\,e^{2 i \pi x}\ \text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}, \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}, e^{2 i \pi x}\right] - \text{LerchPhi}\left[e^{-2 i \pi x}, 3, \frac{1}{2}\right]\right)\right)$

In[4]:= $\text{Plot}\left[\{\sqrt{30}\ x\,(1-x),\ f[x]\},\ \{x, -0.25, 1.25\}\right]$



Out[4]= - Graphics -

In[5]:= $\text{Plot}\left[\{\sqrt{2}\ \text{Sin}[\pi\,x],\ f[x]\},\ \{x, -0.25, 1.25\}\right]$



Out[5]= - Graphics -

(* Determinem el valor mitja de l' operador $H=-\frac{1}{2}\ \frac{d^2}{dx^2}$ en l' estat $\Phi\,(x)=\sqrt{30}\ x\ (1-x)$ *)

In[16]:= $\int_0^1 \sqrt{30}\ x\,(1-x)\ \text{Simplify}\left[-\frac{1}{2}\ D\left[\sqrt{30}\ x\,(1-x),\ \{x, 2\}\right]\right]dx$

Out[16]= 5

(* Determinem el valor mitja de l' operador $H^2=\frac{1}{2}\ \frac{d^4}{dx^4}$ en l' estat $\Phi\,(x)=\sqrt{30}\ x\ (1-x)$ *)

In[17]:= $\int_0^1 \sqrt{30}\ x\ (1-x)\ \text{Simplify}\left[\frac{1}{4}\ \text{D}\left[\sqrt{30}\ x\ (1-x),\ \{x,\ 4\}\right]\right] dx$

Out[17]= 0

(* Determinem el valor mitja de l' operador H=$-\frac{1}{2}\ \frac{d^2}{dx^2}$ en l' estat Φ (x) expandit en termes de la base *)

(* recordem que f[x_]=$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\sqrt{30}}{(2n+1)^3\ \pi^3}$ Sin[(2 n +1) π x];

El terme $-\frac{1}{2}$ D[f[x],{x,2}] és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\sqrt{30}}{(2n+1)^3\ \pi^3}$ ($\frac{1}{2}$) ((2 n +1) π)^2 Sin[(2 n +1) π x]; *)

(* Fem el producte i integre. Integral de la suma=
suma d' integrals. Calculem primer les integrals que hi ha implicades*)

In[38]:= $\int_0^1 \text{Sin}[(2n+1)\ \pi\ x]\ \text{Sin}[(2m+1)\ \pi\ x]\ dx$

Out[38]= $\frac{\text{Sin}[2\ m\ \pi]}{4\ (m+m^2)\ \pi}$

In[37]:= $\int_0^1 \text{Sin}[(2n+1)\ \pi\ x]\ \text{Sin}[(2n+1)\ \pi\ x]\ dx$

Out[37]= $\frac{1}{2}$

(* aleshores,
si m no és igual a n la integral és zero. Si m=n aquesta val 0.5. Aleshores el valor mitjà queda: *)

In[39]:= $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\sqrt{30}}{(2n+1)^3\ \pi^3}\ \frac{8\sqrt{30}}{(2n+1)^3\ \pi^3}\left(\frac{1}{2}\right)((2n+1)\ \pi)^2\left(\frac{1}{2}\right)$

Out[39]= 5

(* Determinem el valor mitja de l' operador H^2=$-\frac{1}{2}\ \frac{d^4}{dx^4}$ en l' estat Φ (x) expandit en termes de la base *)

(* definim h[x]=$\frac{1}{4}$ D[f[x],{x,4}] ----> h[x_]=$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\sqrt{30}}{(2n+1)^3\ \pi^3}$ ($\frac{1}{4}$) ((2 n +1) π)^4 Sin[(2 n +1) π x];

Anàlogament apleguem a que: *)

In[43]:= $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\sqrt{30}}{(2n+1)^3\ \pi^3}\ \frac{8\sqrt{30}}{(2n+1)^3\ \pi^3}\left(\frac{1}{4}\right)((2n+1)\ \pi)^4\left(\frac{1}{2}\right)$

Out[43]= 30