Ones de matèria d'estats estacionaris de sistemes quàntics i moviment estacionari clàssic en medis amb índex de refracció variable

Josep Planelles

June 30, 2007

És ben sabut que qualsevol ona que es propaga sense distorsió és solució de l'equació de D'Alembert,

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\, \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

on v és anomenada velocitat de fase. Aquesta velocitat és única en un medi homogeni. Així, la velocitat de la llum és c en el buit, independentment de la freqüència que té. Cal dir, però, que medi estrictament homogeni sols hi ha el buit. És ben conegut que quan un feix de llum blanca entra en una prisma es produeix una separació de colors, cosa que vol dir que l'angle de refracció dels distints colors és diferent i, d'acord amb la llei de Snell, que l'índex de refracció també ho és. Recordem que aquest índex no és altra cosa que la relació entre la velocitat de la llum al buit i en el medi on es refracta, $n = c/v$. Aleshores, concloem que la velocitat de propagació és diferent per a les distintes freqüències. El motiu és que el medis estan formats per àtoms i tot i que una vareta de ferro puga semblar homogènia no ho és, sinó que presenta granulositat atòmica i aquesta granulositat trenca la perfecta homogeneïtat del medi. Ara be, si la longitud d'ona és ordres de magnitud major que la distància entre àtoms, el moviment no "veu" la granulositat del medi i és per això que un ampli rang de longitud d'ones es propaguen en els medis que usualment definim homogenis a velocitat constant. Així, sentim com el so que viatja per l'aire (a 340 m/s) aplega al receptor sense distorsió, és a dir, sense que les diferents freqüències apleguen desfasades. En allò que segueix, considerarem que estem en aquest cas: velocitat de fase v independent de la freqüència, de manera que el moviment ondulatori pot propagar-se sense distorsió.

Considerem ara una hetorostructura, és a dir, un material compost de fragments de materials homogenis units. En cada fragment homogeni de material les ones viatgen sense dispersió, però en cada fragment ho fan a velocitat diferent. És a dir, estem en front d'un problema on $v = v(x)$. Aleshores, podem ressoldre l'equació d'ones en cada fragment i desprès aplicar les oportunes condicions d'empalme. Alternativament, podem ressoldre numèricament el problema considerant unicament condicions frontera i una equació,

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = v(x)^2\, \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Aquest resultat ens obri una via de solució d'un tercer problema. Imaginem que sintetitzem un medi on l'índex de refracció és una funció de la posició i considerem que les freqüències que ens interessen estan en el rang de les baixes freqüències, on la velocitat de propagació és independent de la freqüència. Considerem el càlcul d'estats estacionaris en aquests medis. Els estats estacionaris són aquells en els que es pot factoritzar l'espai i el temps, és a dir aquells en els que $\Psi(x,t) = \Phi(x)f(t)$. Aquest moviments portats a l'equació (2) permeten obtenir l'equació d'ones estacionàries,

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = -\frac{\mu}{v(x)^2}\Phi(x), \tag{3}$$

on μ és una constant que deriva de la separació de variables. Si fem el canvi formal,

$$\frac{\mu}{v(x)^2} = 2[E - V(x)], \tag{4}$$

on E és una constant i $V(x)$ una funció de les coordenades, podem reescriure l'equació (3) en la forma,

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + V(x)\Phi(x) = E\Phi(x). \tag{5}$$

Considerem tot seguit la forma de les ones estacionàries en un parell de medis definits per la relació funcional de la velocitat de propagació $v(x)$.

- Considerem una velocitat constant $v(x) = a$. Des de l'equació (4) tenim que

  $$\frac{\mu}{2a^2} = E - V(x),$$

  com E és arbitrària, fixem $V(x) = 0$ en l'equació (5) i obtenim,

  $$-\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = E\Phi(x).$$

  Aquest és un problema formalment idèntic al de la partícula quàntica en una caixa.

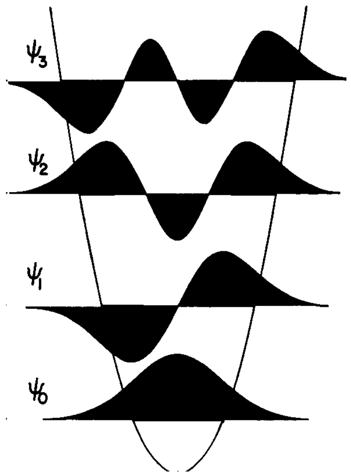
- Considerem una velocitat tal que $v(x)^2 = \frac{a}{b^2-x^2}$. Des de l'equació (4) tenim que

$$\frac{\mu b^2}{2a} - \frac{\mu}{2a}x^2 = E - V(x).$$

Com E és arbitrària, fixem $V(x) = \frac{\mu}{2a}x^2$ en l'equació (5) i obtenim,

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + \frac{\mu}{2a}x^2\Phi(x) = E\Phi(x).$$

Aquest és un problema formalment idèntic al de l'oscil·lador harmònic quàntic i ens diu que, en particular, si el medi és infinit les ones estacionàries seràn com les que indica la figura. El sistema sembla con-



finat en $(-b, b)$, atès que fora d'aquest interval la velocitat de fase és imaginària. Però l'amplitud $\Phi(x)$ es pot estendre fins l'infinit. La paràbola de la figura mostra, per a diferents ones estacionàries, els límits $\pm b$ on v és real, límits que representarien una mena de punts de retorn per al sistema.

- Considerem una velocitat tal que $v(r)^2 = \frac{r}{a-r}$. Des de l'equació (4) tenim que

$$-\frac{\mu}{2} + \frac{\mu a}{2}\frac{1}{r} = E - V(r).$$

com E és arbitrària, fixem $V(r) = -\frac{\mu a}{2}\frac{1}{r}$ en l'equació (5) i obtenim,

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi(r)}{dr^2} - \frac{\mu a}{2}\frac{1}{r}\Phi(x) = E\Phi(r).$$

que és un problema formalment idèntic al dels estats estacionaris amb $\ell = 0$ de l'àtom d'hidrogen si considerem que $\Phi(r) = rR(r)$, on $R(r)$ representa la part radial de les funciones d'ona de l'hidrogen. El sistema torna a semblar estar confinat en $r < a$ (per evitar velocitat de fase imaginàries), però l'amplitud torna a poder estendre's més enllà d'aquest punt de retorn i aplegar fins l'infinit, decaient exponencialment.

Conclussions finals

L'anàlisi anterior permet contemplar les ones de matèria d'estats estacionaris de sistemes de partícules mecanoquàntiques com ones clàssiques en medis amb índex de refracció dependent de la posició.