Universidad Autónoma de Madrid

Emmy Noether
y su Impacto en la Física Teórica

Sergio Montero Modino,

Historia de las Matemáticas

Profesor: Enrique Zuazua Iriondo

Curso 2005/06

Imagen en portada: Emmy Noether
Fuente: McTutor History of Mathematics,
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

Índice

La historia de Emmy Noether es la de una mujer excepcional, con un talento fuera de serie, atrapada en un época hostil. Su avanzado pensamiento matemático se veía complementado con una personalidad arrolladora, aunque maternal y comprensiva cuando se precisaba. En su vida hubo una serie de factores que influyeron profundamente en la faceta académica: el hecho de ser mujer donde, pese al reconocimiento de la gran mayoría de la comunidad matemática, jamás consiguió una posición y salario dignos, y el hecho de ser judía, pacifista y simpatizante de izquierdas, que forzó su exilio —como el de muchos otros— tras el ascenso de Hitler y el nacionalsocialismo al poder en 1933.

Su obra matemática se separa usualmente en tres períodos: primero en Erlangen, donde se doctoró con Paul Gordan trabajando en la teoría de invariantes, más tarde en Göttingen donde desarrolló su vertiente más abstracta y característica, aparte de productiva, y finalmente en Estados Unidos, a caballo entre el Bryn Mawr College femenino en Pennsylvania y el Institute for Advanced Study de Princeton, New Jersey.

Tal y como indica el título, en este trabajo hablaremos de su vida y obra, aunque nos centraremos en una pequeña parte de su trabajo. Es la referente a su artículo *"Invariante Variationsprobleme"* de 1918 [1], donde establece un resultado de suma importancia para la física, en particular para la teórica: *toda simetría de un sistema físico da lugar a una cantidad conservada.*

1. Entrelazando Vida y Obra

Para Emmy Noether vida y obra fueron conceptos indisolubles. Gran parte de las características de la época determinaron conjuntamente a una y a otra. Es por esto que sea más natural contar su vida y contar su obra entrelazándolas entre si, viendo como cada una influía y determinaba a la otra.

Como hemos dicho previamente, se suelen establecer tres períodos, más o menos marcados por ciertos hitos en su vida. Erlangen fue la ciudad donde nació, transcurrió su juventud y, más importante para las matemáticas, donde se doctoró. El paso a Göttingen viene marcado por la invitación que recibió de Hilbert y Klein, y fue donde despegó su carrera científica y alcanzó las más altas cotas. Finalmente, el ascenso del nazismo en Alemania determinó su exilio forzoso a los Estados Unidos, donde después de dos años murió.

Es esta combinación de factores políticos, sociales y matemáticos, los que hacen que todo en ella sea algo unido, tal y como le gustaba pensar en matemáticas. Citando a van der Waerden [2], uno de sus estudiantes de doctorado: *"para Emmy Noether, las relaciones entre números, funciones y operaciones se vuelven transparentes, generalizables y productivas únicamente después de que hayan sido disociadas de todo objeto particular y que hayan sido reducidas a relaciones conceptuales generales".*

Referencias útiles para esta sección han sido [4, 5, 6, 7]. En la web se pueden encontrar además otras páginas con información más o menos complentaria a la de las anteriores fuentes.

1.1. Erlangen

Emmy Noether nació en la ciudad de Erlangen el 23 de marzo de 1882, siendo la primera hija del matemático Max Noether, profesor de matemáticas en la universidad de Erlangen, y de Ida Amalia Kaufmann, proveniente de una rica familia de Colonia. Aparte de ella hubo tres hermanos más: Alfred en 1883, Fritz en 1884 y Gustav Robert en 1889, que murió en la infancia.

Su padre Max fue un matemático respetado, cuyo trabajo se situaba principalmente en la geometría algebraica. Uno de sus resultados fue importante en este campo, conocido como el *teorema del residuo*, o *teorema fundamental de Noether.* Max fue el sucesor de Felix Klein en Erlangen, quien había partido hacia Göttingen para trabajar con David Hilbert, y quien había hecho famosa a la ciudad anunciando el llamado *Programa Erlagen*, que consistía en clasificar y estudiar geometrías de acuerdo con las propiedades que permanecen invariantes bajo distintos grupos de transformaciones.

Emmy Noether acudió a la escuela Städtische Höhere Töchterschule de Erlangen desde 1889 hasta 1897, donde recibió clases de idiomas, matemáticas y también piano, algo común en la educación femenina. En principio su objetivo consistía en convertirse en profesora de idiomas, para lo que estudió inglés y francés a un nivel más avanzado, e hizo los exámenes del estado de Bavaria en la primavera de 1900 consiguiendo buenas calificaciones (*sehr gut*). Esto le permitiría enseñar ambos idiomas en cualquier escuela femenina de Bavaria.

Sin embargo, Emmy decidió proseguir sus estudios, y así acudió a la universidad de Erlangen de 1900 a 1902 para seguir las clases. Hay que decir que en aquella época la presencia de la mujer en la universidad era esporádica. Oficialmente no eran reconocidas como estudiantes, y sólo podían acudir como oyentes previa autorización del profesor de la asignatura. El Senado Académico de la universidad de Erlagen declaró en 1898 que la admisión de mujeres estudiantes *"echaría abajo todo orden académico"*. En ese mismo período preparó sus exámenes de graduación [1], que realizó en la *Königliches Realgymnasium* de Nuremberg en julio de 1903, y de allí viajó a Göttingen, donde tomó contacto por primera vez con matemáticos de la talla de Hilbert, Klein o Hermann Minkowski.

Al año siguiente, cambiaron las leyes en Erlangen, lo que le permitió matricularse allí y poder trabajar bajo la tutela de Paul Gordan, gran amigo de Max Noether, y matemático con inclinaciones más hacia lo computacional o algorítmico. De hecho, la tesis de Emmy en 1907 [3], titulada *"Sobre sistemas completos de invariantes para formas ternarias bicuadráticas"*, contenía 331 invariantes de las formas bicuadráticas ternarias. Ella misma calificaba este trabajo como una *"jungla de fórmulas"* y *"una mierda"*. Sin embargo, este período le valió para familiarizarse con la teoría de invariantes, que más tarde aplicaría con éxito en cuestiones de Relatividad General. La lectura de esta tesis la realizó el 13 de diciembre de 1907, y fue calificada con la distinción de *summa cum laude*.

[1] Una especie de selectividad, o P.A.U.

El desarrollo normal de una carrera científica como la suya sería el de la *Habilitation*, pero su condición de mujer impidió su consecución por el momento. Es necesario mencionar que su padre sufrió la polio a los 14 años, lo cual le dejó lisiado y debilitado de por vida. Permaneció así en Erlangen, ayudando a su padre en las tareas académicas, supervisando a estudiantes doctorales y también prosiguiendo su propio trabajo; eso sí, sin ningún salario ni comisión.

Sus trabajos comenzaron a ser conocidos ya por esa época. Así, en 1908 el *Circolo Matematico di Palermo* la acogió entre sus miembros, y un año más tarde entró a formar parte de su homólogo germano, el *Deutsche Mathematiker Vereinigung.* También en 1909 dió su primera conferencia en el encuentro anual del DMV en Salzburgo, y en 1913 en Viena.

En los años que siguieron, lo más reseñable fue la aparición de Ernst Fischer como sucesor del puesto de Gordan, quien se había retirado en 1910. Fischer fue un mentor para ella, y puso a Emmy Noether en contacto con el tratamiento abstracto de las ideas típico de Hilbert, que más tarde sería la línea de pensamiento que la Noether desarrollaría en su actividad científica.

1.2. Göttingen

Fue en 1915 cuando Emmy aceptó la invitación de Hilbert y Klein para volver a Göttingen, de un tiempo a esa parte convertida en *capital mundial de las Matemáticas.* Sin embargo, la intención inicial de conseguirle un puesto resultó fallida. Se encontraron con las leyes —*Privatdozentenverordnung*—, por la cual sólo candidatos masculinos podían acceder al puesto, y a la oposición de algunos profesores en otras disciplinas. Recordando que se encontraban inmersos en la 1ª Guerra Mundial, célebre fue el argumento *"qué pensaran nuestros soldados"*, se preguntaban, *"cuando vuelvan a la Universidad y encuentren que se supone que deben aprender a los pies de una mujer"*. Mítica[2] fue también la respuesta de Hilbert: *"Meine Herren, no veo que el sexo de la candidata sea un argumento en contra de su admisión como docente. Después de todo esto no es una casa de baños"*. Mientras tanto, Hilbert y Noether acordaron la treta de hacer aparecer a Emmy como asistente para que ésta pudiese dar las clases:

[2]Esto no es algo probado positivamente, aunque se encuentra repetido hasta la saciedad en distintos escritos.

> *Seminario de Matemática-Física. Teoría de invariantes: Prof. Hilbert, con la asistencia de la Sra. Dr. E. Noether, Lunes 4–6 p.m., libre de tasas.*

Justo dos semanas después de que Emmy partiera hacia Göttingen, su madre murió en Erlangen, previsiblemente de manera repentina puesto que de no ser así seguramente no habría viajado. Esto motivó su vuelta hacia su ciudad natal para pasar unas semanas al lado de su padre, ahora más desvalido que nunca. Durante sus múltiples viajes entre Erlangen y Göttingen siguió trabajando en teoría de invariantes y en construcciones de ecuaciones con grupo de Galois predefinido: *¿es cualquier grupo de permutaciones el grupo de Galois de alguna ecuación?* Esta última cuestión le fue presentada por Landau en Göttingen.

Es un poco más tarde cuando por sugerencia de Hilbert —para ayudarle Klein y a él— comienza su trabajo en los invariantes diferenciales de Albert Einstein y problemas variacionales, que la mantuvo ocupada durante 1917/18. Presentó parte de sus resultados en seminarios, en particular *Invariante Variationsprobleme* en julio de 1918 frente a la Sociedad Matemática en Göttingen, que fue publicado a finales de ese mismo año [1]. Al año siguiente, la Guerra había llegado a su fin, y había traido consigo una serie de mejoras para la mujer tales como el derecho a voto, y una modificación del reglamento de oposiciones. El anterior artículo es justamente el que se considera su tesis de *Habilitation.* En particular, el 21 de mayo de 1919 la facultad aprobó la petición de habilitación, el 28 de mayo Emmy realizó un examen oral, y el 4 de junio dió la conferencia de prueba frente a la plana mayor matemática de la facultad de Filosofía de Göttingen: Courant, Debye, Hilbert, Klein, Landau, Prandtl, Runge y Voigt entre otros. Es en este artículo en el que se centra la segunda parte de este trabajo. En particular, el resultado es conocido por los físicos como el *Teorema de Noether.* Se ha convertido en parte de su arsenal teórico, y formaliza la idea de que cada generador de un grupo de simetría lleva asociada una cantidad conservada. Como ella misma comentaba en un anexo a su tesis de habilitación:

> *[...] El segundo de estos artículos, Invariante Variationsprobleme, que designé como mi tesis de habilitación, trata acerca de grupos continuos finitos o infinitos, en el sentido de Lie, y desvela las consecuencias que tiene para un problema de variaciones el ser invariante con respecto de un tal grupo. Los resultados generales contienen, como casos especiales, los teoremas de primeras integrales según se conocen en mecánica; más aún, los teoremas de conservación y las relaciones entre las ecuaciones*

> *de campo en la teoría de la relatividad —mientras que, por otro lado, el recíproco de estos teoremas también es dado [...]*

Después de estos trabajos siguió la parte más conocida e importante de su trabajo. Se desvió de la teoría de invariantes para adentrarse en el mundo de los ideales, anillos, módulos y otras estructuras. Uno de sus trabajos más monumentales, y que sentó las bases del álgebra abstracta moderna es *"Idealtheorie in Ringbereichen"*. Muchas ideas de esta etapa luego han evolucionado enormemente y, recientemente, han encontrado aplicación en la física teórica actual. Encontramos así un nuevo nexo entre esta mujer y ese campo de estudio.

Durante el período de Göttingen, además, tuvo a su cargo un gran número de estudiantes que constituyeron el llamado grupo de *chicos de la Noether.* Estudiantes a los que ayudaba y con quienes incluso compartía sus ideas, permitiéndolos ser los autores de los artículos de investigación. También se acuñó en aquella época el término de la *escuela Noether,* no sólo para la gente que pertenecía a ella sino también para un modo de pensar y actuar en matemáticas, donde la abstracción era un elemento capital.

Como reconocimientos oficiales ya al final de este período cuentan las invitaciones a los IMC de Bolonia en 1928 y Zurich en 1932, así como el premio memorial Alfred Ackermann-Teubner, junto con Artin, por el "Avance del Conocimiento Matemático".

Poco tiempo después Alemania comenzó un nuevo proceso de cambio. El auge de la ideología nacionalsocialista, cristalizada en el ascenso de Hitler al poder en 1933, supuso entre otras cosas, y centrándonos en los primeros años, la finalización de contratos y derechos para gran parte de sus ciudadanos. El exilio fue imperativo para muchos de ellos.

1.3. Bryn Mawr y Princeton

Efectivamente, el 2 de abril de 1933 se le comunicó la suspensión de su derecho a dar clase, al igual que a otros como por ejemplo Courant o el físico Max Born. Tras esto, Weyl trató de encontrar algún puesto de profesor visitante para Emmy Noether. Recibió dos propuestas, de Oxford en Inglaterra y del Bryn Mawr College en Estados Unidos, una institución académica para mujeres. En principio pospuso la invitación estadounidense, pensando que iría a Oxford para el período invernal de 1933/34. Sin embargo, a finales de octubre se encontraba a bordo del *Bremen,* camino del Bryn Mawr College.

El trabajo de Emmy Noether continuó allí como era de esperar, teniendo en cuenta el saber vivir de esta mujer tan humilde. Aparte de las clases y de la tutela de algunas estudiantes —Olga Taussky Todd entre ellas—, comenzó a viajar semanalmente a Princeton para dar charlas de dos horas en el Instituto de Estudios Avanzados sobre álgebra abstracta. Entre otros, se encontraban allí Brauer, Einstein, Flexner, Lefschetz, Veblen y Weyl.

Tras ese período de un año, Emmy volvió a Alemania por última vez. Allí se despidió de su hermano Fritz antes de que emigrase a Siberia —donde más tarde fue ejecutado—, visitó a varios amigos y se deshizo de su casa. En el verano de ese año volvió al Bryn Mawr, donde se le había extendido por un año más su contrato de visitante. Le quedaba claro que no volvería a Alemania en un largo tiempo. De todas maneras, tanto Veblen como Weyl se encontraban preparados para mover sus hilos en cuanto fuese necesario para conseguirle un puesto.

Una vez retomada la vida allí, continuó con su trabajo y sus conferencias. Ya en 1935, anunció un breve receso en éstas para someterse a una operación, pero no mucho más. De hecho, existe una última carta a su gran amigo Helmut Hasse en los días previos a su muerte, llena de contenido matemático pero en la que no comenta nada acerca de su salud. El día 14 de abril, tras una operación quirúrgica, le sobrevino una infección que acabó con su vida. Era el final de una matemática de bandera, de una mujer que luchó contra todas las adversidades para vivir de lo que amaba, y de una persona que jamás dudó en compartir y ceder sus conocimientos, aparte de impregnar todo lo que le rodeaba con su visión abstracta de la Matemática.

2. Impacto en la Física Teórica

Como vimos en la primera sección, en el período de 1917/18 Emmy Noether trabajó colaborando con Hilbert y Klein en invariantes diferenciales, un tema relacionado con la reciente Teoría de la Relatividad General de Einstein (1915). En uno de sus artículos [1], como hemos dicho, estableció la relación entre simetría y cantidad conservada. Esta explicación matemática, como demostración rigurosa que es, clarificó las leyes de conservación conocidas por aquel momento: conservación de la energía, del momento angular, del momento lineal...

Albert Einstein había estado trabajando en su nueva teoría de la gravitación desde que publicó su trabajo en 1905 sobre Relatividad Especial. A los dos años, en 1907, se percató de la equivalencia entre masa inercial y masa gravitacional, pero tardó otros ocho años en completar la teoría. Allá por junio y julio de 1915, acudió a Göttingen, donde dió una serie de seis conferencias acerca de su nueva teoría. Entre los asistentes se encontraba Hilbert. Meses después, en noviembre de ese mismo año, Einstein encontró finalmente las ecuaciones de campo que describen la dinámica gravitacional. En ese mismo mes, Hilbert publicó paralelamente esas mismas ecuaciones. En su caso, Hilbert obtenía las ecuaciones como solución a un problema variacional: minimizar la acción del ahora conocido como Lagrangiano de Einstein–Hilbert.

Sin embargo, y a pesar del éxito de la teoría, algunos puntos no quedaban cerrados. Era por ejemplo el caso de la *conservación local de la energía.* En el caso de la Relatividad General —clásica—, parecía que el principio de conservación local de la energía no se cumplía, a diferencia de otras teorías clásicas de campos como la hidrodinámica, el electromagnetismo… Fue precisamente Emmy Noether quien, en su artículo que le valió la *Habilitation* [1], dió una respuesta cualitativa a esa pregunta.

Aparte de estos aspectos históricos en relación con la Relatividad General, en un plano más amplio el Teorema de Noether constituyó todo un revulsivo en la física teórica. No sólo es una herramienta de uso a nivel directo o indirecto, sino que también es una nueva manera de afrontar lo desconocido. El uso de la simetría y sus implicaciones se ha convertido prácticamente en un principio guía para todo físico teórico. Este teorema no sólo es usado en gravitación, sino que es de aplicación general: en mecánica clásica, mecánica cuántica, teoría cuántica de campos, etc. Por ejemplo, el Modelo Estándar actual de la física de partículas se basa en el principio de simetría *gauge*, en el que uno implementa una serie de transformaciones de simetría *internas,* i.e. no toca las coordenadas sino el espacio de campos. Las cantidades conservadas son por ejemplo la *carga eléctrica,* englobada en la Electrodinámica Cuántica, la *carga de color,* englobada en la Cromodinámica Cuántica…

Por tanto, es interesante mostrar el enunciado, derivación y consecuencias del teorema, para lo que primero hablaremos un poco de los principios y cálculo variacionales. Una vez "provistos" de esa tecnología, repasaremos la demostración del teorema de Noether y daremos algunos ejemplos.

2.1. Cálculo Variacional

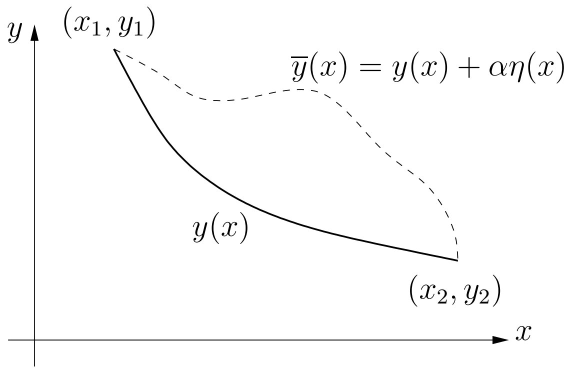
Motivados por el trabajo de Hilbert, con su formulación Lagrangiana de la Relatividad General, y por el teorema de Noether que fue obtenido inicialmente en ese contexto, nos centramos en la idea de los principios variacionales.

Buscamos funciones $y(x)$ que hagan mínima la integral[3]

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; f(x, y, y') \; , \tag{2.1}$$

con $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. La idea para encontrar la y es que en cuanto la "perturbemos" un poquito, el valor de I crecerá. Así tomamos

$$\overline{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x) \; , \quad \text{con} \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha \ll 1 \; .$$



Para cada función $\eta(x)$ fija, tenemos una integral que depende de α

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; f\Big(x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)\Big) \; , \tag{2.2}$$

que debe cumplir $\partial_\alpha I(\alpha)|_{\alpha=0} = 0$, ya que suponemos es estacionaria en $\alpha = 0$, i.e. cuando no hay perturbación. Si derivamos bajo el signo integral utilizando la regla de la cadena, y particularizamos a $\alpha = 0$

$$0 = I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x) \right) \; . \tag{2.3}$$

[3]Suponemos a partir de ahora que nuestras funciones son $f, \eta \in C^2(\mathcal{M})$, con $\mathcal{M}$ la variedad, que en este primer caso será $\mathbb{R}^2$.

Si integramos por partes el segundo término, nos queda

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\ \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] = 0\ , \tag{2.4}$$

que debe ser cero para *toda* perturbación $\eta(x)$. Esto nos lleva a la *ecuación de Euler–Lagrange*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\ . \tag{2.5}$$

Veamos ahora un ejemplo.

Uno puede preguntarse cuál es la trayectoria que debe seguir una partícula para ir de un punto a otro del plano $\mathbb{R}^2$ en el menor tiempo posible, cuando está sometida a un potencial gravitatorio. Este es el llamado problema de la *braquistócrona.*[4] Pues bien, la trayectoria en el plano con coordenadas cartesianas (x, y), puede ser descrito como encontrar la $y(x)$ que minimiza el tiempo. Por supuesto, debe cumplirse que $y(x_1) = y_1$, y que $y(x_2) = y_2$, donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los puntos inicial y final respectivamente. Escogemos $(x_1, y_1) = (0, 0)$ por simplicidad de las ecuaciones. Aplicando conservación de la energía, y si inicialmente está parada, tenemos para cada altura y

$$E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + mg(0 - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy}\ . \tag{2.6}$$

Recordando que la velocidad se expresa como $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, con $\mathrm{d}s$ el elemento diferencial de arco

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2\ ,$$

por lo que haciendo $y' := \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}\ \mathrm{d}x\ . \tag{2.7}$$

Así, nuestro problema inicial consistente en minimizar el tiempo se convierte en un problema de variaciones para la funcion $f(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$. Si aplicamos la ecuación de Euler–Lagrange obtenemos tras unos pasos

$$y[1 + (y')^2] = C = \text{cte.}\ , \tag{2.8}$$

cuya solución es la *cicloide*, no la línea recta!

$$\begin{aligned} x &= \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta)\ , \\ y &= \frac{C}{2}(1 - \cos\theta)\ . \end{aligned}$$

[4]Ver por ejemplo [8].

Otro ejemplo es el de la trayectoria de la luz, enunciado como el principio del tiempo mínimo de Fermat, y resuelto por el matemático irlandés William Rowan Hamilton. De hecho, fue esta resolución la que motivó a Hamilton la extensión a problemas de Mecánica, como el que hemos visto de la braquistócrona. Básicamente es la respuesta a la pregunta: ¿cuál es la trayectoria que sigue la luz para ir de un punto a otro del espacio? En este caso, se suele pensar que será la geodésica; en particular, en un espacio euclídeo sería una recta. En realidad la respuesta correcta es diferente: *es la trayectoria que minimiza el tiempo de llegada.* La razón radica básicamente en el **índice de refracción.**

Así, la idea metafísica de Euler en la que la Naturaleza consigue sus objetivos mediante el medio más económico, se vió dotada de rigor mediante el llamado *Principio de Mínima Acción de Hamilton.*

Proposición 1 *La trayectoria de una partícula, o en general la evolución de un sistema, es aquella que hace estacionario un funcional de las variables dinámicas, llamado la acción y usualmente denotado por S.*

Es importante notar que de este principio se siguen las ecuaciones de Euler–Lagrange. Esto es algo que vemos en lo siguiente.

Ecuaciones de Euler–Lagrange en teoría clásica de campos.

Dadas las aplicaciones que daremos al final, rederivamos aquí las ecuaciones de Euler–Lagrange para una teoría de campos. Igualmente, en la siguiente subsección daremos una demostración del teorema de Noether para esas teorías. Particularizarlo al caso de la Mecánica es sencillo.

Consideremos ahora una acción $S[\phi, \partial\phi]$ para un campo genérico ϕ, que puede tener índices de espaciotiempo o internos, pero que ahorramos para ser más claros [5]. La derivación es la misma. Si realizamos una variación infinitesimal arbitraria de ϕ

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x \; \delta\mathcal{L} = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x \; \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \, \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \, \delta\partial_\mu\phi \right) \; , \tag{2.9}$$

[5] Acerca de la notación: en esta formulación, la coordenada x de espaciotiempo es $x^\mu := (x^0, \vec{x})$, donde $\mu = 0, 1, \ldots, D-1$, siendo D la dimensión de la variedad $\mathcal{M}$. La coordenada temporal es x^0, y las espaciales son $\vec{x}$. La variedad tiene una métrica $g_{\mu\nu}(x)$, que depende del punto y que determina el diferencial de distancia $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x) \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$. Se usa también para subir y bajar índices: no son lo mismo x^μ y x_μ (eso sólo ocurre en el espacio con métrica euclidea).

donde la variación de las coordenadas x es nula por hipótesis. Esto significa que la variación de ϕ conmuta con las derivadas. Integrando por partes para obtener un prefactor $\delta\phi$

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x \left\{ \frac{\delta S}{\delta \phi}\, \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi \right\} \ , \tag{2.10}$$

donde definimos la primera variación de la acción como

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \ . \tag{2.11}$$

Si usamos el teorema de Stokes en el segundo término de (2.10), queda como una integral sobre la frontera $\partial\mathcal{M}$. Para que sea cero es suficiente imponer que la variación en la frontera del campo se anule —en analogía con lo que vimos en el caso de la Mecánica—, $\delta\phi|_{\partial\mathcal{M}} = 0$. Así, requerir que la acción S sea estacionaria implica las ecuaciones de Euler–Lagrange o ecuaciones de movimiento para el campo $\phi(x)$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \ . \tag{2.12}$$

2.2. El Teorema de Noether

Esta formulación de la física resulta ser tremendamente ventajosa. Como ya hemos mencionado sin demostrar, las ecuaciones de campo de Einstein surgen de la variación del Lagrangiano de Einstein–Hilbert con respecto de la métrica de la variedad. Por otra parte, en física de partículas se trabaja igualmente con Lagrangianos.

La invariancia de éstos bajo un cierto grupo de simetría tiene consecuencias bien importantes, y es justamente el contenido del teorema de Noether. Éste se centra en los llamados grupos continuos en el sentido de Lie, i.e. grupos G que a la vez son variedad. Un punto de la variedad de grupo lleva asociado una transformación en particular de G. Así, veremos la relación entre simetrías globales y cantidades conservadas, y la relación entre simetrías locales e identidades *gauge;* éstos corresponden respectivamente al primer y segundo teoremas de Noether, que se diferencian en que el primero tiene un número finito (o infinito numerable) de generadores de la simetría, mientras que para el segundo se consideran grupos con infinitos generadores. La diferencia entre local y global consiste en que el parámetro de la transformación dependa o no de la posición en el espaciotiempo.

Consideremos entonces las transformaciones infinitesimales de coordenadas y campos $\widetilde{\delta}x^\mu$ and $\widetilde{\delta}\phi$

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}x^\mu &= x'^\mu - x^\mu \;, & (2.13)\\ \widetilde{\delta}\phi(x) &:= \phi'(x') - \phi(x) \;, & (2.14)\end{aligned}$$

donde x y x' son las coordenadas de un mismo punto $p \in \mathcal{M}$ pero en dos sistemas coordenados distintos. Las transformaciones de ϕ comprenden tanto términos provenientes del cambio de coordenadas como de otras transformaciones *internas*[6]. Veamos qué ocurre bajo esa variación, si pedimos que S sea estacionaria

$$0 = \widetilde{\delta}S = \int_{\mathcal{M}} (\widetilde{\delta}\mathrm{d}^D x\mathcal{L} + \mathrm{d}^D x\widetilde{\delta}\mathcal{L}) \;. \qquad (2.15)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}\mathrm{d}^D x &= \mathrm{d}^D x\partial_\mu\widetilde{\delta}x^\mu \;, & (2.16)\\ \widetilde{\delta}\mathcal{L} &= \delta\mathcal{L} + \widetilde{\delta}x^\mu\partial_\mu\mathcal{L} \;, & (2.17)\\ \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\,\delta\partial_\mu\phi \;. & (2.18)\end{aligned}$$

Las variaciones δ y ∂_μ conmutan ya que δ no contiene ningún cambio de coordenadas. Así se tiene, tras integrar por partes

$$\widetilde{\delta}S = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\left\{\frac{\delta S}{\delta\phi}\,\delta\phi + \partial_\mu\left(\mathcal{L}\widetilde{\delta}x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\,\delta\phi\right)\right\} \;, \qquad (2.19)$$

que reexpresando $\delta\phi$ en función de $\widetilde{\delta}\phi$ da

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\left\{\partial_\mu j^\mu_{N1}(\widetilde{\delta}) + \frac{\delta S}{\delta\phi}\,\delta\phi\right\} = 0 \;, \qquad (2.20)$$

donde

$$j^\mu_{N1}(\widetilde{\delta}) = T_{\mathrm{can.}}{}^\mu{}_\nu\widetilde{\delta}x^\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\,\widetilde{\delta}\phi \;, \qquad (2.21)$$

que a su vez es

$$T_{\mathrm{can.}}{}^\mu{}_\nu = \eta^\mu_\nu\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\,\partial_\nu\phi \;, \qquad (2.22)$$

con η^μ_ν la métrica de Minkowski, diag$(+,-,-,-)$, y $T_{\mathrm{can.}}{}^\mu{}_\nu$ el *tensor de energía-momento.*

[6]Notar que ahora tenemos $\widetilde{\delta}$, que es distinto de δ, dado que el primero evalua la variación de ϕ en el mismo punto p pero distintos sistemas coordenados, mientras que el segundo evalua la diferencia en puntos distintos cuyas coordenadas son iguales en sistemas coordenados distintos. La relación entre ellas es $\delta\phi = \widetilde{\delta}\phi - \epsilon^\mu\partial_\mu\phi$.

Teorema 1 (global) *Sea un sistema dinámico descrito por una acción S, e invariante bajo un grupo de simetría con un número finito de generadores. Entonces, asociado con cada generador tenemos una corriente y una carga conservadas.*

Prueba. En general, teniendo en cuenta lo anterior, si se satisfacen las ecuaciones de movimiento concluimos que $j^{\mu}_{N1}(\widetilde{\delta})$ es una corriente vectorial conservada, i.e. satisface una ecuación de continuidad

$$\partial_{\mu} j^{\mu}_{N1} = 0 \ . \tag{2.23}$$

Estas términos se dicen conservados porque se usan para definir cantidades, *cargas,* conservadas en el tiempo. Para ver que hay una por cada generador, podemos hacer

$$\widetilde{\delta} x^{\mu} := \sigma^{I} \widetilde{\delta}_{I} x^{\mu} \ , \quad \widetilde{\delta}\phi := \sigma^{I} \widetilde{\delta}_{I} \phi \ ,$$

donde los σ^I, $I = 1, \ldots, n$ son los parámetros asociados a los generadores del grupo de simetría. Los generadores no son más que las cantidades conservadas que hemos mencionado antes.

Las cargas se obtienen integrando la componente temporal j^{0}_{N1} de la corriente conservada sobre una hiper-superficie a $t =$ cte.

$$Q(V_t) = \int_{V_t} \mathrm{d}^{D-1}x \ j^0 \ , \tag{2.24}$$

que derivada con respecto del tiempo da cero. ■

Teorema 2 (local) *Sea un sistema dinámico descrito por una acción S, e invariante bajo un grupo de simetría con un número infinito de generadores. Entonces, existe todo un conjunto de relaciones entre las cantidades conservadas, de manera que no todas son independientes.*

Prueba. En este caso, los parámetros de las transformaciones dependen de las coordenadas, i.e. $\sigma^I = \sigma^I(x)$, de manera que, aunque el anterior resultado es cierto, uno puede hacer todavía más.

Primero, observamos que en este caso las transformaciones contienen derivadas de los parámetros. Se pueden eliminar estas derivadas integrando por partes en la ecuación (2.20):

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x \left(\partial_{\mu} j^{\mu}_{N2}(\sigma) + \sigma^I D_I \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) \ , \tag{2.25}$$

donde los operadores D_I contienen derivadas actuando en las ecuaciones de movimiento. Esta identidad es cierta para valores arbitrarios de los parámetros. Podemos escogerlos de tal forma que j^μ_{N2} se anule en la frontera. Las identidades, independientes de las ecuaciones de movimiento —no como antes— son

$$D_I \frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \ , \tag{2.26}$$

que relacionan las ecuaciones de movimiento, de manera que no todas son independientes. Así, como todas son idénticamente ciertas, obtenemos la ley de conservación

$$\partial_\mu j^\mu_{N2}(\sigma) = 0 \ . \tag{2.27}$$

Las cargas conservadas se obtienen de manera análoga al anterior caso. ■

Para finalizar, es importante mencionar que el recíproco no siempre es cierto. Existen leyes de conservación topológicas, las cuales no provienen de un grupo continuo de simetrías sino más bien de propiedades globales de los campos sobre la variedad.

2.3. Ejemplos

Después de una discusión tan ardua, para llegar a las conclusiones del teorema(s), es interesante ver, al menos por encima, algunas aplicaciones de éste.

Un ejemplo manido es el de las transformaciones espaciotemporales, i.e. donde cambiamos las coordenadas. En Relatividad General, donde se incluyen todas, se suele denotar como el grupo de los difeomorfismos $\mathrm{Diff}(\mathcal{M})$. Ejemplos particulares son las rotaciones, las traslaciones, dilataciones… Consideremos por ejemplo el caso de las *traslaciones:*

$$x^\mu \ \rightarrow \ x'^\mu = x^\mu + a^\mu \ ,$$

donde a^μ es el D-vector por el que trasladamos, o en su versión infinitesimal

$$\widetilde{\delta} x^\mu = \sigma^\mu \ .$$

En primer lugar, para teorías relativistas-especiales, el Lagrangiano es por hipótesis un escalar bajo las traslaciones —también bajo las transformaciones de Lorentz—, de manera que $\widetilde{\delta}\mathcal{L} = 0$. Además, en este tipo de transformaciones el elemento de volumen Minkowskiano es invariante, $\widetilde{\delta}\mathrm{d}^D x = 0$, por lo que de (2.15) sabemos que la acción es estacionaria.

Bien, para una traslación infinitesimal, y en estas teorías con Relatividad Especial, todos los campos son escalares bajo la transformación, por lo que $\widetilde{\delta}\phi = 0$. Siguiendo el primer teorema de Noether encontramos D corrientes conservadas —una por cada dirección de traslación—

$$j^{\mu}_{N1\ (\nu)} = T_{\text{can.}}{}^{\mu}{}_{\rho}\, \widetilde{\delta}_{\nu}\, x^{\rho} = T_{\text{can.}}{}^{\mu}{}_{\nu}\ , \tag{2.28}$$

ya que $\widetilde{\delta}_{\nu}\, x^{\rho} = \delta^{\rho}_{\nu}$, la delta de Kronecker. Así, la cantidad conservada es el tensor de energía-momento.

Ahora bien, dentro de σ^{μ} tenemos a σ^{0}, que es una traslación temporal, y tenemos las σ^{i}, que son traslaciones espaciales. A su vez, el tensor de energía-momento tiene entre sus componentes a T_{00}, que es la densidad de energía, y a T_{0i}, que es el momento lineal del sistema. El teorema de Noether nos dice que hay unas cargas conservadas, que son

$$Q_{(\nu)} = \int_{V_t} \mathrm{d}^{D-1}x\ j^{0}_{(\nu)} = \int_{V_t} \mathrm{d}^{D-1}x\ T_{\text{can.}}{}^{0}{}_{\nu}\ , \tag{2.29}$$

que dan respectivamente, *conservación de la energía* y *conservación del momento lineal.*

También hay otro tipo de transformaciones, llamadas *internas*: en este caso las coordenadas no se tocan, mientras que lo que se hace es actuar en el espacio de campos. No entraremos en detalle, pero podemos decir por ejemplo que tenemos dos posibilidades: que la transformación interna no dependa de las coordenadas, global, o que sí dependa, local, tal y como hemos visto en las demostraciones.

Por ejemplo, en una teoría cuántica del electromagnetismo —la Electrodinámica Cuántica—, tenemos un campo vectorial sin masa, el *fotón*, y un fermión con masa, el *electrón*[7]. El Lagrangiano de QED es

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \overline{\Psi}(x)\,(i\not{D} - m)\,\Psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x) + \text{otros}\ , \tag{2.30}$$

donde $\Psi(x)$ es el campo que define al electrón, $\not{D}$ es la llamada derivada covariante en el espacio interno, y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzo, que no es más que una combinación antisimétrica de la derivada del campo del fotón

$$F_{\mu\nu} = 2D_{[\mu}A_{\nu]} = D_{\mu}A_{\nu} - D_{\nu}A_{\mu}\ .$$

Pues bien, la cantidad conservada de esta acción $S = \int \mathrm{d}^{D}x\mathcal{L}$ no es más que la *carga eléctrica,* que se encuentra escondida en la definición de la derivada covariante. Es

[7]Aunque en realidad el mecanismo para dar masa a estos fermiones y otras partículas no es trivial en absoluto

justamente esta "constancia" de la carga eléctrica la que nos permite llamar electrón al electrón, ya que de cambiar, lo que un día llamamos electrón sería al día siguiente otra cosa.

Finalmente, el Modelo Estándar de partículas consiste en un grupo de simetría interna local con la estructura $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{color}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{debil}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{hipercarga}}$. Las partículas fundamentales descritas por éste las listamos en la siguiente tabla junto con algunos de sus valores

Partícula	**Símbolo**	**Carga**	**Masa (GeV)**
1ª familia			
Neutrino electrónico	ν_e	0	$< 3 \times 10^{-9}$
Electrón	e^-	–1	$0{,}511 \times 10^{-3}$
Quark up	u	2/3	$1{,}5 - 4{,}5 \times 10^{-3}$
Quark down	d	–1/3	$5 - 8{,}5 \times 10^{-3}$
2ª familia			
Neutrino muónico	ν_μ	0	$< 0{,}19 \times 10^{-3}$
Muón	μ^-	–1	0,106
Quark charm	c	2/3	$1{,}0 - 1{,}4$
Quark strange	s	–1/3	$0{,}080 - 0{,}155$
3ª familia			
Neutrino del tau	ν_τ	0	$< 0{,}018$
Tau	τ^-	–1	1,78
Quark top	t	2/3	$174{,}3 \pm 5{,}1$
Quark bottom	b	–1/3	$4{,}0 - 4{,}5$
Bosones gauge			
Fotón	γ	0	0
Bosones W	$W^\pm$	± 1	$80{,}42 \pm 0{,}04$
Bosones Z	Z^0	0	$91{,}188 \pm 0{,}002$
Gluón	g	0	0
Escalares de vacío			
Higgs	h	0	$> 114{,}3 (95\,\%)$

Es por tanto clara la importancia de este teorema en la Física Teórica moderna, presente en multitud de sus rincones y teorías.

Referencias

[1] E. Noether, *"Invariante Variationsprobleme," Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen* (1918) 235–257.

[2] B. L. van der Waerden, *"Nachruf auf Emmy Noether," Mathematische Annalen* **111** (1935) 469–476.

[3] E. Noether, *"Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form," Journal f. d. reine u. angew. Math.* **134** (1908) 23–90.

[4] A. Dick, *"Emmy Noether, 1882-1935,"* Birkhäuser Boston, 1981.

[5] X. Nomdedeu Moreno, *"Mujeres, manzanas y matemáticas: entretejidas,"* Colección La Matemática en sus Personajes 7, ed. Nivola, 2000.

[6] N. Byers, *"The Life and Times of Emmy Noether,"* `arXiv:hep-th/9411110.`

[7] J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *"Emmy Amalie Noether,"* McTutor History of Mathematics.

[8] G. F. Simmons, *"Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas,"* ed. McGraw-Hill, 2ª edición, 1993.