

Seminari: Espín, bescanvi i estadística

Josep Planelles

July 22, 2007

La física clàssica distingeix entre llum (fenomen ondulatori) i matèria (fenomen corpuscular), mentre que la teoria quàntica té en la dualitat ona-corpúscle els seus orígens. De manera molt general, podem referir-nos a una ona com *un camp que oscil·la en el temps i l'espai*. En el cas d'ones electromagnètiques (llum) el camp oscil·lant és electromagnètic i, en funció de la freqüència d'oscil·lació, la llum presenta un o altre color. La llum presenta també una altra propietat a banda del color, la polarització. Aquesta magnitud ens indica la direcció d'oscil·lació de la component elèctrica del camp (la component magnètica oscil·la perpendicularment a la component elèctrica). Un raig típic de llum ordinària és una mescla d'ones amb distintes polaritzacions. Hi ha però certes substàncies, como ara els cristalls de calcita o els filtres polaritzadors, complements habituals de càmeres fotogràfiques reflex, que únicament deixen passar al seu través la part del raig que oscil·la en una determinada direcció, proporcionant així llum polaritzada.

El caràcter vectorial del camp elèctric fa que pugam descriure la polarització lineal, de la que just hem parlat, com un a superposició de llum polaritzada circular a esquerres i a dretes. O, a l'inrevés, que la llum polaritzada circular resulta d'una superposició de polarització vertical i horitzontal, amb el pertinent desfase. Qualsevol polarització pot ser descrita com una combinació de dues polaritzacions linealment independents (vertical/horitzontal, circular a esquerres/dretes, etc.).

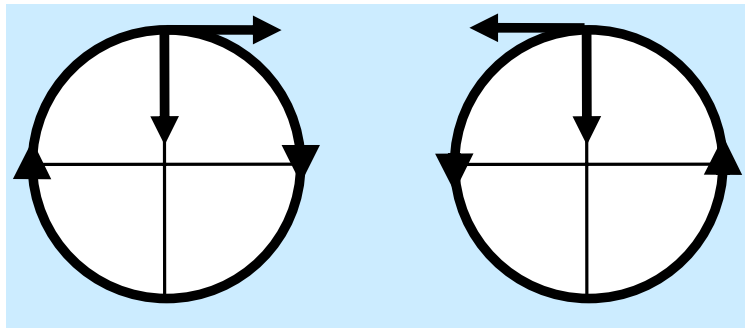


Figure 1: La polarització circular vista com suma de polaritzacions lineals.

La polarització circular implica una rotació i per tant un moment angular. Efectivament, Beth¹ va mostrar experimentalment que en fer passar llum polaritzada circularment a través d'un cristall que parcialment l'absorbeix i que estava penjat d'un fil, aquest començava a rodar, és a dir, adquiria un moment angular (vegeu Fig. 2). Podem dir que polarització és una forma complicada d'indicar

¹R.A.Beth, Phys. Rev. 50 (1936) 115.

que la llum pot fer rodar els objectes que il·lumina.

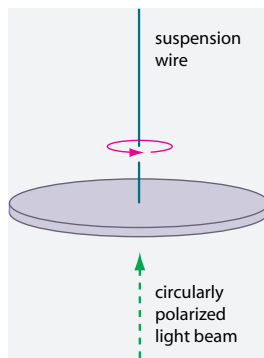


Figure 2: Experiment de Beth.

En una descripció microscòpica de la llum, en la que aquesta està formada per una col·lecció de partícules idèntiques anomenades fotons, mesures adequades mostren que cada quantum de llum posseeix un moment angular $L = \hbar$, cosa que indica que el fotó presenta una rotació². Anomenem *helicitat* a aquest moment angular, que pot ser positiu o negatiu, o simplement l'anomenem espín del fotó³. Aleshores, l'espín ens indica la polarització de la llum.

La magnitud de la helicitat o espín de fotó no hauria de ser cap sorpresa, atès que podem trobar clàssicament que la relació entre l'energia E i el moment angular L que transporta una ona electromagnètica polaritzada circularment estan relacionades amb la seua freqüència ω segons $L = E/\omega$. Per demostrar aquesta relació seguim Feynman i considerem que un feix de llum polaritzada circular incideix sobre un àtom que, de manera simplificada, el representem per un electró en una òrbita al voltant del nucli de radi r . En resposta al camp elèctric l'electró fa un cercle a la velocitat angular ω . El camp elèctric exerceix una força sobre l'electró $F = eE$ i un moment $M = er \times E$.

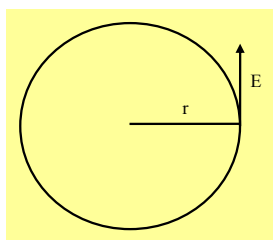


Figure 3: Electrò sota la influència d'una llum amb polarització circular.

²Fixem-nos que malgrat que macroscòpicament qualsevol parella de polaritzacions independents constitueixen una base, la polarització circular és una propietat intrínseca de les partícules de llum o fotons.

³Hom podria pensar que si l'espín del fotó pot adquirir valors $m_s = \pm 1$, hauria de ser possible també tenir fotons amb $m_s = 0$, cosa que no s'observa experimentalment. El motiu deriva del fet que els fotons van a la velocitat c de la llum. Aleshores, l'eix de rotació ha de ser paral·lel a la direcció del moviment i la velocitat de rotació perpendicular (no importa la direcció) si no volem superar c . Si el fotó tingués massa, és a dir, si viatgés a una velocitat inferior a c , si que podria presentar un espín $m_s = 0$.

Aquest moment de la força provoca una variació de moment angular $M = dL/dt$ i un treball $W = Md\theta$. Al llarg d'un període s'efectua un treball $W = 2\pi M$ a la vegada que s'incrementa el moment angular amb $\Delta L = MT = M2\pi/\omega$. Aleshores concloem que $\Delta L/W = \omega$. Com l'energia i el moment que guanya l'àtom els perd la radiació, podem concloure que la radiació polaritzada circularment que presenta una energia per unitat de volum E transporta també un moment angular per unitat de volum $L = E/\omega$, on ω és la freqüència de la radiació (que és també la freqüència en que gira el camp elèctric, perpendicularment a la direcció de propagació).

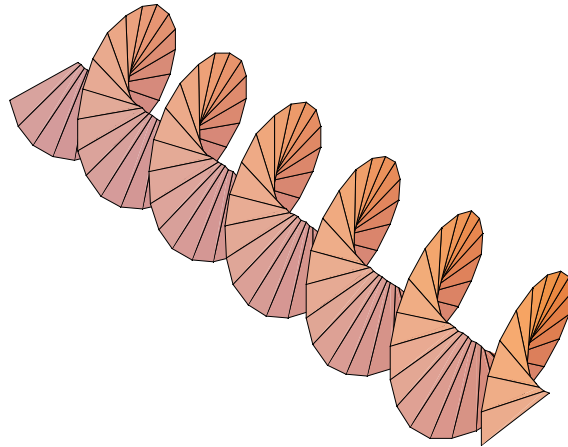


Figure 4: Llum amb polarització circular.

Les partícules materials també presenten espín,⁴ que és una forma de dir que les ones de matèria, de manera similar a les ones electromagnètiques, poden ser polaritzades. L'espín descriu la manera en que les partícules roden i, subsidiàriament, demostra que aquestes no poden ser simples esferes puntuals.

Els experiments mostren que electrons, protons i neutrons tenen espín $1/2$ i per tant dues possibles orientacions: *up* i *down*. Moments angular fraccionaris no són freqüents en la vida ordinària. Així espín $1/2$ significa que únicament una rotació de 4π radians (i no una de 2π radians) és equivalent a una rotació nul·la.

Sovint podem llegir en la literatura que aquest és un fenomen purament quàntic i que no podem visualitzar en el món macroscòpic on un a rotació 2π sempre suposa una identitat. Herman Weyl va ficar un exemple macroscòpic on aquesta necessitat de rotar 4π per a retornar al punt inicial es fa necessària. Tot seguit fem una descripció personalitzada del seu exemple.

Imaginem dos conus truncats en contacte en el vèrtex i al llarg d'una generatriu. Si fem rodar simultàniament els dos conus mantenint contacte, retrobem la posició inicial després que cadascun rode un angle 2π . Aquesta observació l'hem feta des d'un sistema de referència extern als conus. Tot seguit ens ubiquem sobre un dels conus, com indica la figura 5, Observariem que l'altre conus realitza una rotació al voltant del seu eix d'angle 4π per retornar al punt inicial. Òbviament, els

⁴Atès que en el cas de partícules materials $v < c$, no trobem restriccions en la orientació de l'eix de rotació i per tant per un S donat són possibles tots els m_s compatibles.

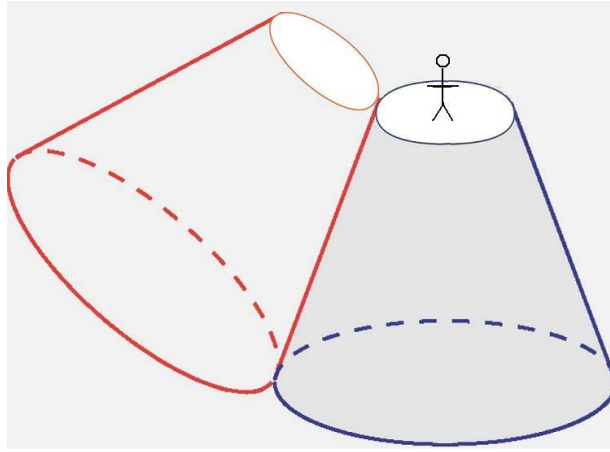


Figure 5: Els dos conus de Weyl.

electrons no són conus truncats. Els conus simplement ens diuen que no és necessàriament descabellat dir que una rotació 2π no ens torna al punt inicial mentre que una altra d'angle 4π si que ho fa.

L'espín està íntimament relacionat amb l'estadística. Diem que els bosons presenten espín enter mentre que els fermions el presenten semienter. En un col·lectivitat de fermions idèntics, como ara electrons, no poden haver-ne dos en el mateix estat quàntic (principi d'exclusió de Pauli), mentre que no hi ha aquest principi d'exclusió en col·lectius de bosons, como ara els fotons. En contrast amb el comportament aïllacionista dels fermions, als bosons els agrada estar junts. No tenen cap principi d'exclusió. Aquest comportament cooperatiu dels bosons els permet actuar orquestradament i produir efectes macroscòpics. Per exemple, milions de fotons poden unir-se coherentment i donar lloc a una ona electromagnètica macroscòpica. El principi de Pauli impedeix que els electrons puguin fer alguna cosa semblant. És per això que, malgrat que els electrons tenen una ona associada, mai veurem ones macroscòpiques d'electrons.

El diferent comportament estadístic d'un i altre tipus de partícula fa que donen lloc a fenomenologies completament diferents. Així, la matèria és impenetrable, la podem tocar, mentre que la llum és intangible i, com un fantasma, la podem travessar o pot passar a través de la matèria sòlida, como ara un vidre, com els fantasmes travessen les parets.⁵

Per una altra banda, sabem que la matèria és bàsicament espai buit (per exemple diem que un àtom d'hidrogen té un radi de $5 \cdot 10^{-9}\text{m}$ i està constituït per un protó de radi 10^{-15}m i un electró de radi $3 \cdot 10^{-15}\text{m}$, és a dir, l'àtom d'hidrogen té un radi al voltant d'un milió de vegades major que el radi de les seues dos partícules constituents). Aleshores, com podem explicar la impenetrabilitat de la matèria si simultàniament diem que la matèria és bàsicament espai buit?

Podem donar ara una resposta: el principi d'exclusió és al motiu que fa que dos trossos de matèria no puguin interpenetrar-se. Per exemple, podem dir que les campanes sonen gràcies al principi de Pauli. Les campanes no sonarien quan les colpeja el martell si aquest les penetrés. En qualsevol exemple de dos trossos de matèria que s'interpenetren un en l'altre, els electrons dels dos àtoms

⁵Podríem fer ciència ficció i dir que la mort suposa un canvi d'espín de les partícules de les que estem formats, electrons, protons i neutrons, des de $S = 1/2$ fins a un valor enter. Aleshores, ens convertiríem en espectres que poden travessar parets i també travessar altres espectres.

haurien d'estar en el mateix lloc, tindrien el mateix estat i això està prohibit pel principi de Pauli. El mateix principi justifica perquè la matèria no pot ser comprimida indefinidament, perquè les estrelles de neutrons no col·lapsen sota la seua pròpia gravetat. A un cert punt, la pressió efectiva de Pauli fa acte de presència i ho impedeix.

Per la seua banda la llum, és a dir els bosons, poden interpenetrar-se sense més problemes. Així es justifica la segona llei de l'òptica geomètrica que estableix que dos rajos de llum que es tallen no es pertorben l'un a l'altre, propagant-se de manera independent. I és que entre els bosons no hi ha principi d'exclusió.

Hem discutit que l'estadística ve marcada pel caràcter enter o semienter de l'espín. Tanmateix, la definició de fermió i bosó no deriva de rotacions, si no de bescanvi de partícules idèntiques. En efecte, si tenim un sistema de dues partícules idèntiques, la funció d'ona l'escrivim $\Psi(x_1, x_2)$, on x_i representa totes les coordenades de la partícula i incloent el seu espín $x_i = (x_i, y_i, z_i, \sigma_i)$. La funció d'ona $\Psi(x_1, x_2)$ en si mateix no és un observable. L'observable és $|\Psi(x_1, x_2)|^2$ que representa la densitat de probabilitat que una de les partícules estiga en x_1 mentre l'altra està en x_2 . Si les partícules són idèntiques, el principi de Heisenberg les fa indistingibles. Aleshores haurà de succeir que $|\Psi(x_1, x_2)|^2 = |\Psi(x_2, x_1)|^2$. Si eliminem les segones potències obtenim dues possibles solucions. Una solució que correspon a bosons, $\Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1)$ i l'altra que defineix els fermions $\Psi(x_1, x_2) = -\Psi(x_2, x_1)$. Aquesta darrera equació fa evident el principi de Pauli per a fermions: si $x_1 = x_2$, aleshores, $\Psi(x_1, x_1) = -\Psi(x_1, x_1)$, i.e. $\Psi(x_1, x_1) = 0$.

Hem de concloure que espín (rotació) i bescanvi (permutació) estan relacionats. Dirac va idear una imatge mecànica per visualitzar aquesta relació. S'anomena *el truc del cinturó* i essencialment és com segueix. Imaginem que dos fermions idèntics estan units per una cinta, com indica la figura 6. Fixem-nos en la cinta que els uneix. Si efectuem una rotació 2π en un extrem de la cinta produïm en ella una enroscadura (cal que feu l'experiència per comprovar-ho!). Si efectuem una segona rotació de 2π , fent un total de 4π radians, obtenim dues enroscadures. Tornem a l'inici. Si efectuem un bescanvi de partícules produïm una enroscadura en la cinta. Si efectuem un segon bescanvi, sota la condició que en els dos bescanvis la primera partícula passe sempre per dalt de la segona, obtenim igualment dues enroscadures. Si fem però que en cada bescanvi passe una partícula per dalt obtenim la situació original.

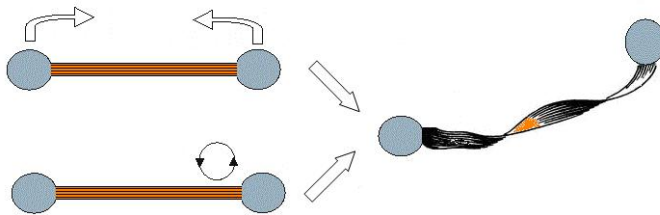


Figure 6: El cinturó de Dirac: Un bescanvi o una rotació de 2π radians en un extrem de la cinta.

Però allò que és important és el bescanvi i no la manera en que aquest s'efectua. Dues enroscadures i una cinta plana haurien de ser equivalents. Dirac (supose) que raonà de la següent manera. Allò que és observable són les dues partícules, no la cinta que les uneix. Aleshores, qualsevol moviment de la cinta que no altere les posicions de les partícules seria invisible i per tant *inexistent*. Si fem que

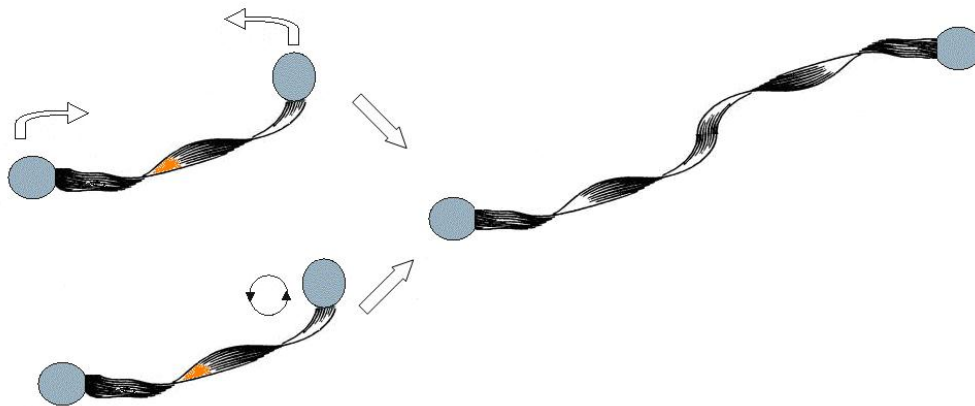
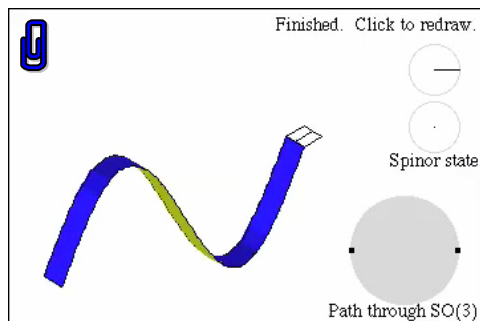


Figure 7: El cinturó de Dirac: Segon bescanvi o segon rotació 2π en un extrem de la cinta.

la cinta amb les dues enroscadures no estiga tensada podem fer-la passar per damunt de la partícula 2 restablint la situació inicial, sense que les partícules hagin alterat la seua posició, com podeu veure en aquesta animació de Greg Egan que podeu trobar en la web.



Animació de Greg Egan

En altres paraules, la cinta descriu el comportament de la fase de les funcions amb espín $1/2$, tant respecte de rotacions (espín) com de permutacions (bescanvi de partícules idèntiques) i la manera en que un i altre estan relacionats. Cal fixar-se que el model mecànic de Dirac requereix un espai (almenys) tridimensional. De fet l'espín sols existeix en tres o més dimensions espacials. Els objectes bidimensionals són anomenats *anyons* perquè no tenen espín. Cal dir que el mon 2D no és una pura curiositat acadèmica perquè en molts experiments de la física d'estat sòlid el sistema és quasi bidimensional. La discussió però d'aquest tòpic va més enllà dels objectius del present seminari

Què podem dir dels fotons, és a dir dels bosons amb $S = 1$? Sens dubte que sota rotacions es comporten de manera diferent als electrons i que haurà de succeir que rotació i bescanvi siguin també processos relacionats.

Fixem-nos, per acabar, que la rotació d'un cos macroscòpic suposa un bescanvi continu de la posició de les seues part constituents. Aleshores, caldria no sorprendre'ns perquè rotació i bescanvi són les dues cares d'una mateixa moneda, de manera que si l'estadística ver marcada per la permutació (bescanvi), aquesta ha de poder ser etiquetada per la rotació (espín).