Bosons, Fermions i Supersimetria

Josep Planelles

January 22, 2025

1 Introducció

Les simetries tenen un paper important en la reducció del nombre de graus de llibertat de qualsevol sistema complex. Com a major bastió, direm que la teoria que descriu les unificacions de les partícules fonamentals i les forces fortes i electro-febles de la natura, anomenada model estàndard, és bàsicament l'aplicació de principis de simetria. Tot i això, sempre se mantenia que fermions i bosons eren dues classes diferents de partícules. Als voltants de 1970 però, apareix una nova teoria, anomenada supersimetria, que ja no tracta bosons i fermions com dues classes diferents de partícules. L'operació de supersimetria converteix bosons en fermions i viceversa. Així, la supersimetria introdueix un soci fermiònic (bosònic) per a cada bosó (fermió) que difereix en mitja unitat de nombre quàntic d'espín. La parella s'anomena superpartícula (spartícula) de la partícula original. La partícula i la seva spartícula han de ser idèntiques en tots els nombres quàntics excepte en el nombre quàntic d'espín. La proposta teòrica de la supersimetria no s'ha provat encara experimentalment. Els acceleradors actuals funcionen a energies molt inferiors a l'energia necessària per provar la supersimetria. Tot i que encara és un debat obert si la natura posseeix supersimetria o no, hi ha interessants aplicacions de la supersimetria com ara resoldre fàcilment sistemes mecano-quàntics que contenen potencials no trivials mitjançant l'explotació de la supersimetria.[1, 2, 3]

2 Bosons, Fermions i supersimetria (SUSY)

Considerem funcions de partícules independents simètriques $|\chi_k \dots \chi_l\rangle_S = \sum_p \hat{p}(\chi_k \dots \chi_l)$ i antisimètriques $|\chi_k \dots \chi_l\rangle_A = \sum_p (-1)^p \hat{p}(\chi_k \dots \chi_l)$. Definim creadors:

$$a_i^+ |\chi_k \dots \chi_l\rangle_A = |\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A \tag{1}$$

$$b_i^+ |\chi_k \dots \chi_l\rangle_S = |\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_S \tag{2}$$

aleshores, $a_i^+ a_j^+ |\chi_k \dots \chi_l\rangle_A = |\chi_i \chi_j \chi_k \dots \chi_l\rangle_A = -|\chi_j \chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A = -a_j^+ a_i^+ |\chi_k \dots \chi_l\rangle_A$, per tant:

$$\{a_i^+, a_j^+\} = 0 \tag{3}$$

$$a_i^+ a_i^+ = 0 \tag{4}$$

i.e., no se poden crear dues partícules en un mateix estat.

També, $b_i^+ b_j^+ |\chi_k \dots \chi_l\rangle_S = |\chi_i \chi_j \chi_k \dots \chi_l\rangle_S = |\chi_j \chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_S = b_j^+ b_i^+ |\chi_k \dots \chi_l\rangle_S$, per tant:

$$[b_i^+, b_j^+] = 0 \tag{5}$$

$$b_i^+ b_i^+ \neq 0 \tag{6}$$

i.e., no hi ha limitació a l'ocupació d'un mateix estat.

Definim també aniquilador $a_i|\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A = |\chi_k \dots \chi_l\rangle_A$.

A partir que $a_i|\chi_k \chi_i \dots \chi_l\rangle_A = -a_i|\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A = -|\chi_k \dots \chi_l\rangle_A$ concloem que a_i ha d'actuar sobre la primera funció. Aleshores, des de: $a_i a_j |\chi_j \chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A = |\chi_k \dots \chi_l\rangle_A$, $a_j a_i |\chi_j \chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A = -a_j a_i |\chi_i \chi_j \chi_k \dots \chi_l\rangle_A = -|\chi_k \dots \chi_l\rangle_A$, deduïm que:

$$\{a_i, a_j\} = 0 \tag{7}$$

Anàlogament, $b_i|\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_S = |\chi_k \dots \chi_l\rangle_S$, $b_i b_j |\chi_j \chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_S = |\chi_k \dots \chi_l\rangle_S$ i $b_j b_i |\chi_j \chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_S = |\chi_k \dots \chi_l\rangle_S$, d'on deduïm que:

$$[b_i, b_j] = 0 \tag{8}$$

Els aniquiladors són adjunts dels creadors. En efecte: $|K\rangle_A \equiv |\chi_i \chi_j\rangle_A = a_i^+ |\chi_j\rangle$. Calculem l'adjunt: ${}_A\langle K| = \langle \chi_j|(a_i^+)^+ \equiv \langle \chi_j|a_i$, on identifiquem $a_i = (a_i^+)^+$, però no amb l'anterior aniquilador (encara).

Com $1 = \langle K|K\rangle_A = \langle \chi_j|a_i|K\rangle_A$ i també $1 = \langle \chi_j|\chi_j\rangle$, identifiquem $a_i|K\rangle_A = |\chi_j\rangle$, i.e., $a_i|\chi_i \chi_j\rangle_A = |\chi_j\rangle$ i, per tant, a_i és un (actua com un) aniquilador.

Anàlogament $|K\rangle_S = |\chi_i \chi_j\rangle_S = b_i^+ |\chi_j\rangle$. Calculem l'adjunt: ${}_S\langle K| = \langle \chi_j|(b_i^+)^+ \equiv \langle \chi_j|b_i$, on identifiquem $b_i = (b_i^+)^+$, però no amb l'aniquilador (encara).

Com $1 = \langle K|K\rangle_S = \langle \chi_j|b_i|K\rangle_S$ i també $1 = \langle \chi_j|\chi_j\rangle$, identifiquem $b_i|K\rangle_S = |\chi_j\rangle$, i.e., $b_i|\chi_i \chi_j\rangle_S = |\chi_j\rangle$ i, per tant, b_i és aniquilador.

Amb $i \neq j$ l'acció $(a_j^+ a_i + a_i a_j^+)|\chi_k \dots \chi_l\rangle_A = 0$ si $\chi_i \notin |K\rangle_A$ i/o $\chi_j \in |K\rangle_A$. Considerem doncs l'única possibilitat a priori no nul·la: $|K\rangle_A = |\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A$ i $\chi_j \notin |K\rangle_A$:

$$\begin{aligned}
(a_j^+ a_i + a_i a_j^+)|\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A &= a_j^+ |\chi_k \dots \chi_l\rangle_A + a_i |\chi_j \chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A \\
&= |\chi_j \chi_k \dots \chi_l\rangle_A - a_i |\chi_i \chi_j \chi_k \dots \chi_l\rangle_A \\
&= |\chi_j \chi_k \dots \chi_l\rangle_A - |\chi_j \chi_k \dots \chi_l\rangle_A = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Finalment,

$$\begin{aligned}
(a_i^+ a_i + a_i a_i^+)|\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A &= |\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A + 0 \\
(a_i^+ a_i + a_i a_i^+)|\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A &= 0 + |\chi_i \chi_k \dots \chi_l\rangle_A \\
\to \{a_i, a_i^+\} &= 1
\end{aligned}$$

En conjunt, $\{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij}$.

Per als estats simètrics, escrivint $|0\rangle$ la funció que no té els estats i, j,

$$\begin{aligned}
(b_i b_j^+ - b_j^+ b_i)|0\rangle &= b_i|\chi_j\rangle - 0 = 0 \\
(b_i b_i^+ - b_i^+ b_i)|0\rangle &= b_i b_i^+|0\rangle - 0 = b_i|\chi_i\rangle = |0\rangle \\
(b_i b_i^+ - b_i^+ b_i)|\chi_i\rangle &= b_i|\chi_i\chi_j\rangle - b_i^+|0\rangle = (|\chi_i\rangle + |\chi_i\rangle) - |\chi_i\rangle = |\chi_i\rangle \\
\rightarrow [b_i, b_j^+] &= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Hem vist doncs que els operadors b_i, b_i^+ presenten l'àlgebra dels creadors aniquiladors de l'osci·lador harmònic, mentre que a_i, a_i^+ presenten una àlgebra igual si canviem commutadors per anticommutadors. Diem que b_i, b_i^+ representen l'osci·lador (HO) harmònic bosònic mentre que a_i, a_i^+ representen l'HO fermiònic.

Per a un únic HO bosònic: $[b, b^+] = 1$, $[b, b] = [b^+, b^+] = 0$ i els operadors admeten la realització típica: $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \frac{d}{d\xi})$, $b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \frac{d}{d\xi})$, de manera que $\frac{1}{2}\{b^+, b\} = \frac{1}{2}(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2) = H_\xi$ amb $H_B = \hbar\omega H_\xi$, i.e., $H_B = \frac{1}{2}\hbar\omega\{b^+, b\} = \hbar\omega(b^+b + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$ amb $\hat{n} = b^+b$ l'operador nombre: $\hat{n}|\phi_k\rangle = k\phi_k\rangle$.

Per a un únic HO fermiònic: $\{a, a^+\} = 1$, $\{a, a\} = \{a^+, a^+\} = 0$ (per tant, $aa = a^+a^+ = 0$) i admeten la realització amb matrius de Pauli: $a = \frac{1}{2}\sigma_-$, $a^+ = \frac{1}{2}\sigma_+$, amb $\sigma_\pm = \sigma_x \pm i\,\sigma_y$. També, l'operador nombre és $\hat{n} = a^+a$, però en aquest cas sols té dos possibles autovalors: zero i la unitat.

En efecte, $\hat{n}^2 = a^+aa^+a = a^+a(1-aa^+) = a^+a - a^+aaa^+ = a^+a$, perquè $aa = 0$. Per tant, $\hat{n}^2 = \hat{n} \rightarrow \hat{n}(\hat{n}-1) = 0 \rightarrow \hat{n}(\hat{n}-1)|\Phi\rangle = n(n-1)|\Phi\rangle$ i també $\hat{n}(\hat{n}-1)|\Phi\rangle = 0|\Phi\rangle = 0$, i.e., $n = 0, 1$.

Per a l'HO fermiònic escrivim $H_F = \hbar\omega H_\xi = \frac{1}{2}\hbar\omega[a^+, a]$. Si expandim, $H_\xi = \frac{1}{2}(a^+a - aa^+) = \frac{1}{2}(\hat{n} - (1 - a^+a)) = \hat{n} - \frac{1}{2}$. Per tant, $H_F = \hbar\omega(\hat{n} - \frac{1}{2})$ i $E_F = \hbar\omega(n - \frac{1}{2})$, amb $n = 0, 1$.

Considerem ara un sistema compost de dos HO no interactuants, un HO bosònic i un HO fermiònic, amb la mateixa freqüència ω. Com no hi ha interacció, el operadors fermiònics i bosònics commuten i podem representar els estats en la forma $|n_B n_F\rangle$. En unitats $\hbar\omega$, l'energia d'aquest HO doble és $(n_B + \frac{1}{2}) + (n_F - \frac{1}{2}) = n_B + n_F$ i l'estat fonamental, $|00\rangle$, té energia zero. Tanmateix, l'energia de l'estat $|n_B n_F\rangle$ no varia si canviem un bosó per un fermió (e.g. $|n_B n_F\rangle \rightarrow |n_B + 1 n_F - 1\rangle$) perquè bosó i fermió tenen la mateixa energia. Com fem el canvi? Definim l'operador supercàrrega $Q = ba^+$ i el seu adjunt $Q^+ = ab^+$. Tenim

$$Q|n_B n_F\rangle = \sqrt{n_B}|n_B - 1\rangle a^+|n_F\rangle = \begin{cases} 0 \;\text{ si }\; n_F = 1 \\ \sqrt{n_B}\,|n_B - 1, n_F + 1\rangle \;\text{ si }\; n_F = 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$Q^+|n_B n_F\rangle = \sqrt{n_B + 1}|n_B + 1\rangle a|n_F\rangle = \begin{cases} 0 \;\text{ si }\; n_F = 0 \\ \sqrt{n_B + 1}\,|n_B + 1, n_F - 1\rangle \;\text{ si }\; n_F = 1 \end{cases} \tag{11}$$

Per tant Q converteix un estat fermiònic $|n_B, 1\rangle$ en un de bosònic $|n_B + 1, 0\rangle$, mentre que Q^+ converteix un estat bosònic $|n_B, 0\rangle$ en un de fermiònic $|n_B - 1, 1\rangle$.

Recordem que $[b,b^+]=\{a,a^+\}=1$, $aa=a^+a^+=0$ i calculem $\{Q,Q^+\}$:

$$\begin{aligned}
\{Q,Q^+\} &= ba^+ab^+ + ab^+ba^+ = bb^+a^+a + bb^+aa^+ && (12)\\
&= (1+b^+b)a^+a + b^+b(1-a^+a) = a^+a + b^+b && (13)
\end{aligned}$$

Per tant, $H=\hbar\omega(\hat{n}_B+\hat{n}_F)=\hbar\omega\{Q,Q^+\}$.
L'operador Q commuta amb H:

$$\begin{aligned}
[Q,H/(\hbar\omega)] &= [ba^+, a^+a+b^+b] = b[a^+,a^+a] + a^+[b,b^+b] && (14)\\
&= b(a^+a^+a - a^+aa^+) + a^+(bb^+b - b^+bb) && (15)\\
&= -ba^+(1-a^+a) + a^+(bb^+ - b^+b)b && (16)\\
&= -ba^+ + a^+b = -a^+b + a^+b = 0 && (17)
\end{aligned}$$

Anàlogament, $[Q^+,H/(\hbar\omega)]=0$ (També $\{Q,Q\}=\{Q^+,Q^+\}=0$). Per tant, aquest hamiltonià commuta amb Q i amb Q^+ i, per tant, és invariant sota la transformació bosó $\Leftrightarrow$ fermió.

Si considerem $H|n_B,0\rangle = E_{B,0}|n_B,0\rangle$, la commutació $[Q,H]$ sobre aquest estat genera:

$$HQ|n_B,0\rangle = QH|n_B,0\rangle = QE_{B,0}|n_B,0\rangle = E_{B,0}Q|n_B,0\rangle = E_{B,0}|n_B-1,1\rangle$$

Per tant, $|n_B,0\rangle$ i $|n_B-1,1\rangle$ estan degenerats.

Finalment si escrivim la realització de l'Hamiltonià,

$$H=\hbar\omega(b^+b+\frac{1}{2}+a^+a-\frac{1}{2}) = (\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2)\mathbb{I}+\hbar\omega\frac{1}{4}\sigma_+\sigma_- - \frac{1}{2}\mathbb{I}$$

amb $\sigma_+\sigma_- = (\sigma_x+i\,\sigma_y)(\sigma_x-i\,\sigma_y)=\sigma_x^2+\sigma_y^2-i\,(\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x)=\mathbb{I}+\mathbb{I}+2\sigma_z$ trobem

$$H=(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2)\mathbb{I}+\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z = \begin{bmatrix} H_+ & 0\\ 0 & H_-\end{bmatrix}$$

amb $H_+=\hbar\omega b^+b$, $H_-=\hbar\omega bb^+$, on H_+ és el mateix HO que H_- amb un shift $\pm\omega$ en l'espectre d'energia.

3 Coda

La super-simetria, intercanvia realment fermions i bosons? Hem dit en la introducció que la supersimetria intercanvia fermions i bosons i que, per tant, prediu que cada partícula té una superpartícula associada de naturalesa oposada (els fermions tenen bosons i els bosons tenen fermions). Açò no vol dir, ni deixa de voler dir, que hi ha un procés físic que "implementa" aquesta simetria. Les simetries són propietats abstractes dels sistemes físics i no cal que hi hagi cap manera d'aplicar-les a un sistema en la pràctica. Per exemple, la simetria

d'inversió temporal no té ”implementació” pràctica ja que, almenys fins ara, no podem revertir el sentit del temps. Concretament, el positró, que és un electró invertit en el temps ho és, no perquè sigui un electró que viatja negativament en el temps, sinó perquè té la quiralitat oposada.
De moment, no hi ha evidència que el nostre univers sigui super-simètric ni que ho deixe de ser. Si fos super-simètric, aleshores és d'esperar que algun mecanisme pogués generar super-partícules molt pesants (molt carregades de massa-energia) que serien les super-partner de moltes de les partícules que coneixem en el Model Estàndard. Per exemple, la supersimetria diu que l'electró té un superpartner anomenat selectró, que és un bosó. Tanmateix, no tenim cap prescripció de com canviar un lleuger electró per un molt pesant selectró.

I si no podem ”fer” una transformació de SUSY, que passa? Tampoc podem ”fer” la paritat o la inversió de temps. Aquestes simetries no descriuen procediments concrets de laboratori, sinó que descriuen patrons en les equacions que podem utilitzar per ajudar a extreure prediccions. En tot cas, futurs experiments poden tenir un resultat inesperat que puga quadrar amb la dinàmica d'una superpartner.

References

[1] B.K. Bagchi, *Supersymmetry in quantum and classical mechanics* Chamman and Hall/CRC, Boca Raton 2001.

[2] A. Kulkarni and P. Ramadevi, *Supersymmetry*, Resonance, 28-41 (2003)

[3] J. Planelles, *Ladder Operators and Boundary Conditions*, International Journal of Quantum Chemistry, Vol. 81, 141-147 (2001).

[4] A. Szabo and N.S. Ostlund, *Modern quantum chemistry*, McGrawn-Hill 1982.