1 El potencial de Yukawa

L'equació relativista que relaciona energia, moment lineal i massa en repòs és:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{1}$$

En el cas del fotó l'equació se simplifica perquè el fotó té massa nul·la, $m_0 = 0$, de manera que: $E^2 = p^2c^2$.

Les equacions mecanoquàntiques poden formalment ser induïdes de les expressions clàssiques amb les substitucions formals,

$$x \to x \qquad ; \qquad \vec{p} \to -i\hbar\nabla \qquad ; \qquad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{2}$$

amb la qual cosa trobem, de manera immediata per substitució formal, l'equació d'ones per al fotó, que no és més que l'equació de l'ona que deriva de les equacions de Maxwell en el buit:

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

Si el sistema és estacionari, la derivada temporal se fa zero, $\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$. Tanmateix si hi ha càrregues, cal afegir-les a la dreta (i.e., $0 \to -4\pi\rho$ en a.u. o $-\rho/\epsilon_0$ en sistema SI). En particular, una càrrega en l'origen té una densitat $\rho = q\delta(\vec{r})$. Amb aquests canvis l'equació (3) se transforma en:

$$\nabla^2\Psi = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}), \tag{4}$$

la solució de la qual és el conegut potencial de Coulomb $\Psi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$.

El portador de les interaccions fortes, que són les responsables de la unió de protons amb protons (malgrat l'enorme repulsió de Coulomb), de protons amb neutrons i de neutrons amb neutrons en el nucli atòmic, ja no són els fotons com en el cas electromagnètic, sinó que és el pió (o mesó π) que, a diferència del fotó, si que presenta massa en repòs. Per tant, en aquest cas, l'equació mecanoquàntica conté un terme màssic addicional. En efecte, des de l'eq. (1) amb l'eq. (2) trobem:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\nabla^2\Psi + m_0^2c^4\Psi \tag{5}$$

on, si el sistema és estacionari, la derivada temporal també se fa zero, $\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$, i si hi ha càrregues, doncs cal també afegir-les a la dreta de l'equació (en el cas d'interacció forta: $0 \to -g\delta(\vec{r})$, on g és la càrrega forta). Finalment, amb el canvi $\mu^2 = \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}$, obtenim l'equació:

$$\nabla^2\Psi - \mu^2\Psi = -g\delta(\vec{r}), \tag{6}$$

l'integració de la qual dóna lloc al potencial de Yukawa: $\Psi = \frac{g}{4\pi}\frac{e^{-\mu r}}{r}$.

2 Equacions de Proca i condicions frontera

En el cas de que la interacció vinga portada per fotons de massa finita, les equacions de Maxwell ha de ser modificades donant lloc a les equacions de Proca que en sistema SI són:[1]

$$\begin{array}{ll} \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \mu_\gamma^2\Phi & \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 & \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \mu_\gamma^2\mathbf{A} \end{array} \tag{7}$$

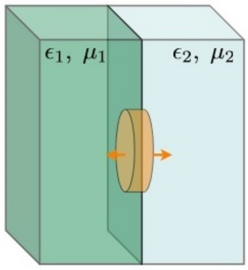
amb $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$

Si ens limitem a electroestàtica, aleshores $\mathbf{A} = 0$, per tant $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, que portada a l'equació 7.1, dóna lloc a:

$$(\nabla^2 - \mu_\gamma^2)\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{8}$$

Per tant,[2] $\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(\mathbf{r}')e^{-\mu_\gamma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'$, que en el cas $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(r')$ dóna lloc a $\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}e^{-\mu_\gamma r}$.

A l'hora d'aplicar les condicions frontera en una interfase entre dos materials de diferent constant dielèctrica, reescrivim l'eq. 8 en la forma $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho - \mu_\gamma'^2\Phi$.



Aleshores, considerem la pastilla de la figura de grossària en l'eix z petita i integrem aquesta equació,

$$\int \nabla \cdot \mathbf{D}\, dV = \int \rho\, dV - \mu_\gamma'^2 \int \Phi dV \tag{9}$$

Tenint en compte la continuïtat de Φ a través de la frontera, en el límit $dz \to 0$ la segon integral se fa zero. Si addicionalment transformem les integrals volumètriques, fent ús del teorema de la divergència, en integrals de superfície trobem:

$$\int (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{u}_z\, dA = \int \sigma\, dA \to \boxed{\mathbf{D}_{1\perp} - \mathbf{D}_{2\perp} = \sigma} \tag{10}$$

References

[1] L-Ch. Tu, J. Luo and G.T. Gillies, Rep. Prog. Phys. **68** 77 (2005)
mirar també M. Gondran, Am. J. Phys. 77, 925 (2009)

[2] *http://www3.uji.es// planelle/APUNTS/QQ/Potencial_Yukawa.pdf*