Introducció elemental a les equacions de Lagrange. Potencials depenents de la velocitat. Camp magnètic

JOSEP PLANELLES

Departament de Química Física i Analítica, Universitat Jaume I,

Apartat 224, E-12080 Castelló, Spain

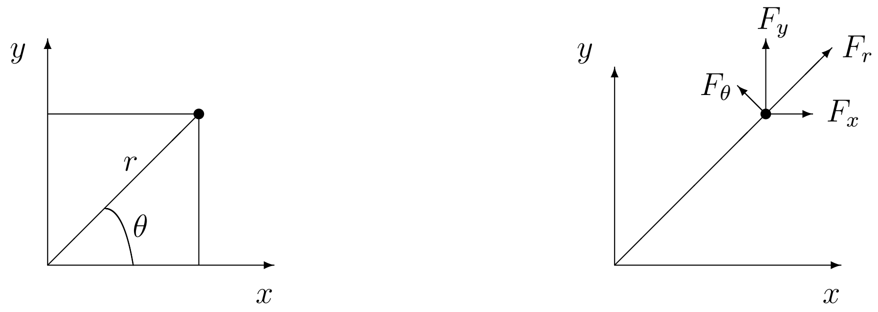
Setembre 2008

1 Coordenades generalitzades.

La mecànica sol introduir-se en coordenades cartesianes per motius de simplicitat. A l'hora d'abordar problemes però resulta que sovint altres coordenades són més convenients. Imaginem una rotació 2D d'una bola lligada a l'origen amb una corda inextensible. En cartesianes tenim un problema en dos dimensions (2D) però en coordenades polars (r, θ) tenim un problema 1D perquè r és constant. En altres paraules, en general resulta convenient expressar les equacions de moviment en coordenades distintes de les cartesianes que anomenarem generalitzades. Tornem sobre l'exemple de la bola unida a l'origen. La relació entre coordenades cartesianes i polars és, d'acord amb el panell esquerre de la figura,

$$x = r\cos\theta \quad\rightarrow\quad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\,\dot{\theta}\sin\theta \tag{1}$$

$$y = r\sin\theta \quad\rightarrow\quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\,\dot{\theta}\cos\theta \tag{2}$$



Calculem l'energia cinètica amb ambdues coordenades,

$$\begin{aligned} T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) &= \frac{m}{2}\left[(\dot{r}\cos\theta - r\,\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\,\dot{\theta}\cos\theta)^2\right] \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) \end{aligned} \tag{3}$$

En cartesianes, el moment lineal p_x conjugat dela coordenada x és simplement $p_x = m\,\dot{x}$ i la contribució a l'energia cinètica $p_x^2/2m$, de manera que $p_x = \partial T/\partial\,\dot{x}$. En polars de seguida veiem que no és tan simple. Ara be, si triem coordenades polars i definim $p_q = \partial T/\partial\,\dot{q}$, on $q = r, \theta$, l'energia cinètica manté una forma similar. En efecte, amb (3), tenim que

$$\begin{aligned} p_r = \frac{\partial T}{\partial\,\dot{r}} = m\,\dot{r}\;;\; p_\theta = \frac{\partial T}{\partial\,\dot{\theta}} = mr^2\,\dot{\theta} = I\,\dot{\theta} \equiv L_z \\ \rightarrow T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2I}. \end{aligned} \tag{4}$$

Respecte la forca tenim que en sistemes conservatius no és més que el gradient canviat de signe del potencial, $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$. Des del panell dret de la figura tenim que $F_r = \cos\theta F_x + \sin\theta F_y$. Aquesta equació també pot ser obtinguda calculant el gradient, amb el concurs de eqs. (1) i (2),

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) = \cos\theta F_x + \sin\theta F_y. \tag{5}$$

Anàlogament,

$$F_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta}. \tag{6}$$

Podem englobar els resultats anteriors per a forces i moments si definim una funció, que anomenem Lagrangiana, mitjançant la fórmula $L = T - V$. Aleshores, per a qualsevol coordenada q, el moment conjugat és $p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ i la força $F_q = \frac{\partial L}{\partial q}$. En conseqüència, la llei de Newton, $\frac{d}{dt}p - F = 0$, és converteix en l'anomenada equació de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{7}$$

La Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ és funció de coordenades q i velocitats $\dot{q}$, aleshores, amb la definició de moment i l'eq. (7),

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\, \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} dq = p\, d\, \dot{q} + \dot{p}\, dq. \tag{8}$$

Podem definir una nova funció de les coordenades i moments $H(p, q)$ mitjançat l'expressió $H = p\, \dot{q} - L$. En efecte, la seua diferencial resulta ser

$$dH = d(p\, \dot{q}) - dL = p\ d\, \dot{q} + \dot{q}\ dp - p\ d\, \dot{q} - \dot{p}\ dq = \dot{q}\ dp - \dot{p}\ dq \tag{9}$$

Aleshores $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, a la vegada que hem comprovat que H té com a variables coordenades i moments.

Aquesta funció H s'anomena Hamiltoniana i equival a la Lagrangiana però és funció de coordenades i moments conjugats. A més a més, sempre que succeeixi que $x_i(q_1, \ldots q_N)$, i.e., que x_i no siga funció explícita del temps (cosa que cobreix tots el casos en que estem interessats), aleshores $T = \sum_{ij} a_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j$, i.e. T és una funció homogènia en grau 2 de les velocitats. En efecte,

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\sum_i \dot{x}_i^2 = \frac{m}{2}\sum_i \left[\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\, \dot{q}_j\right]^2 \\ &= \frac{m}{2}\sum_i \left[\sum_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)^2 \dot{q}_j^2 + 2\sum_{j<k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\, \dot{q}_j \dot{q}_k\right] \\ &= \frac{m}{2}\sum_{jk} \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_{jk} a_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned} \tag{10}$$

on $a_{jk} = a_{kj}$ no és funció de les velocitats $\dot{q}_i$.

Per ser T homogènia en segon grau de les velocitats, $T(\lambda \dot{q}) = \lambda^2 T(\dot{q})$, podem escriure que $2T = \dot{q}\, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$. En efecte[1]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{jk} a_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k &= \sum_{jk} a_{jk} \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}\, \dot{q}_k + \dot{q}_j\, \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) \\
&= \sum_{jk} a_{jk} \left(\dot{q}_k\, \delta_{ij} + \dot{q}_j\, \delta_{ki} \right) = 2 \sum_l a_{il}\, \dot{q}_l \\
&\rightarrow \sum_i \dot{q}_i\, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \qquad (11)
\end{aligned}$$

En conseqüència, $\sum_i \dot{q}_i\, p_i = 2T$ i $\boxed{H = \sum_i \dot{q}_i\, p_i - L = 2T - T + V = T + V}$, i.e., la funció H coincideix amb l'energia total.

En sistemes conservatius les forces depenen únicament de la posició $F = -\nabla V(x, y, z)$. En presència de camp magnètic les forces depenen també de la velocitat: $F = e\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, on e és la càrrega i $\mathbf{B}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{A}(x, y, z)$ el camp magnètic.[2]

Òbviament, la llei de Newton $\dot{p} - F = 0$ continua sent certa en presència de camp magnètic. La podem expressar en la forma,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q} = Q. \qquad (12)$$

En sistemes conservatius, on el potencial únicament és funció de les coordenades $V(q)$, Q representa la força. En efecte, des de l'eq. 12 hom pot concloure que si V no és funció de les velocitats aleshores $Q = -\nabla V$. Si el potencial és funció també de les velocitats cal introduir el concepte de força generalitzada $Q = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q}$.

[1] Una demostració alternativa més simple és la següent. Des de $T(\lambda x) = \lambda^2 T(x)$, si derivem respecte de λ tenim que $\frac{\partial T}{\partial \lambda x} \frac{\partial \lambda x}{\partial \lambda} = 2\lambda T$. Particularitzant $\lambda = 1$ trobem que $2T = x \frac{\partial T}{\partial x}$.

[2] Per a la present discussió considerarem camps magnètics $\mathbf{B}$, i per tant potencials vectors $\mathbf{A}$, independents del temps.

Considerem un exemple simple de potencial depenent de la velocitat $V = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$, on $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ és la velocitat, $\mathbf{A}(x, y, z)$ el potencial vector. Respecte el signe negatiu, aquest s'ha inclòs de cara a la presentació de resultats. Tenim que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial v_x} + \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial x} = -\frac{d}{dt}A_x + \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial x} \tag{13}$$

Com $\frac{dA_x}{dt} = \sum_i (\frac{\partial A_x}{\partial x_i})v_i \equiv (\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i})A_x$, des de la identitat vectorial (Arfken p.45) $\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ que particularitzem

$$[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \left(\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) A_x, \tag{14}$$

concloem que $Q = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ representa la força magnètica sobre una càrrega unitat que té una velocitat $\mathbf{v}$. En general, $V = -e\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ és el potencial si la càrrega val e.

La Lagrangiana serà $L = T - V = \frac{m}{2}\sum_i v_i^2 + e\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$, el moment $p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + e\,A_x = \pi_x + e\,A_x$, i.e., $\mathbf{p} = \pi + e\,\mathbf{A}$, on π és el moment cinemàtic i $\mathbf{p}$ el moment canònic conjugat de la coordenada. La Hamiltoniana en aquest cas, $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$, resulta

$$H = \sum_i (\pi_i + e\,A_i)v_i - \frac{1}{2}\sum_i \pi_i v_i - e\sum_i v_i A_i = \frac{1}{2}\sum_i \pi_i v_i = \frac{1}{2m}\pi^2 = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 \tag{15}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}$$