

Càlcul de la integral de $I_n = \int_0^\infty r^n e^{-ar} dr$ amb $a > 0$

Procedim a integrar per parts,

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

Anomenem: $u = r^n$ i $dv = e^{-ar}$. Per tant, $du = nr^{n-1}$ i $v = -\frac{1}{a}e^{-ar}$. Aleshores

$$I_n = [uv]_0^\infty - \int_0^\infty v du = [r^n(-\frac{1}{a})e^{-ar}]_0^\infty + \frac{n}{a} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-ar} dr$$

És immediat que,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^n}{e^{ar}} = 0$$

L'altre límit,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^n}{e^{ar}}$$

és indeterminat. Per determinar-lo, derivem numerador i denominador de forma independent n vegades:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^n}{e^{ar}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{nr^{n-1}}{ae^{ar}} = \dots = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n e^{ar}} = 0$$

Aleshores,

$$I_n = \frac{n}{a} I_{n-1}$$

Reiterant la integració obtenim:

$$I_n = \frac{n}{a} I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} = \dots = \frac{n!}{a^n} I_0$$

on $I_0 = \int_0^\infty e^{-ar} dr = \frac{1}{a}$. Per tant,

$$I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

Càlcul de la integral de $J_n = \int_0^\infty r^n e^{-ar^2} dr$ amb $a > 0$

Anàlogament, amb $u = r^{n-1}$ i $dv = re^{-ar^2}$, i càlcul similar de límits,

$$J_n = \frac{n-1}{2a} J_{n-2}$$

Ho pot fer la integral immediata J_1 i comprovar que $J_1 = \frac{1}{2a}$. Més complicada és J_0 , que podem calcular-la indirectament calculant primer el seu quadrat $J_0^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-ar^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4a}$. Amb aquest resultat i reiterant la recurrència obtenim:

$$J_{2n+1} = \int_0^\infty r^{2n+1} e^{-ar^2} dr = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$
$$J_{2n} = \int_0^\infty r^{2n} e^{-ar^2} dr = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$