

Representació matricial de dispositius físics

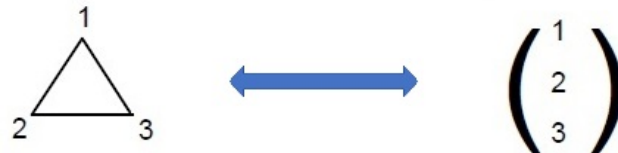
Josep Planelles

September 18, 2020

1 Representació matricial d'operadors

En simetria, en parlar de representacions lineals, més concretament de representacions matricials, ja vam aprendre a representar accions sobre objectes mitjançant l'aplicació de matrius quadrades sobre matrius columna.[1]

Per exemple, representem un triangle per una matriu columna,



on recorrem els vèrtexs en e.g. sentit anti-horari, i representem accions sobre el triangle, com ara rotacions o reflexions especulars, mitjançant matrius. Així, els elements $\{E, C_3^{(1)}, C_3^{(2)}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ amb que etiquetem les rotacions d'angle $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ i les tres reflexions σ_i , venen representats per les matrius:¹

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_3^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En efecte,

$$C_3^1 \begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \triangle \\ 3 \quad 1 \end{array} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tanmateix, l'aplicació successiva de transformacions ve representada pel producte de matrius. Per exemple tenim que:

$$\sigma_1 \cdot C_3^1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) = \sigma_1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \triangle \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 2 \\ \triangle \\ 1 \quad 3 \end{array} = \sigma_3 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \right)$$
$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) = \sigma_1 \left(\begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 1 \quad 2 \end{array} = C_3^2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$$

¹Definim σ_1 com l'espill que talla el triangle pel vèrtex 1 i per mitjan costat 2 – 3, anàlogament definim σ_2 i σ_3 .

Les representacions matricials són:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 & C_3^1 & = \sigma_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \sigma_1 & \sigma_2 & = C_3^2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2 Polaritzadors, operadors mecanicoquàntics i la seua representació matricial

Quan presentàrem l'experiment mental de Dirac amb polaritzadors vam parlar de valors i vectors propis de l'aparell de mesura.[2] Dèiem que el polaritzador té dos valors propis: passar o ser absorbit. I lligat amb aquests valors propis, també presenta dos estats propis que representem pels camps elèctrics \vec{E}_0 i \vec{E}_{90} , el primer passa el polaritzador mentre que el segon és absorbit. Les polaritzacions arbitràries \vec{E}_θ se poden expressar com una combinació lineal d'aquesta base de dos vectors: $\vec{E}_\theta = \cos\theta\vec{E}_0 + \sin\theta\vec{E}_{90}$.

Sobre aquests vectors, el polaritzador \hat{P}_0 actua com un projector que elimina la component \vec{E}_{90} : $\hat{P}_0\vec{E}_\theta = \cos\theta\vec{E}_0$, on $|\cos\theta|^2$ representa la fracció de fotons que passa el polaritzador (o la probabilitat de que passe un fotó pel polaritzador). Anàlogament, \hat{P}_{90} representa el polaritzador vertical (el que elimina la component \vec{E}_0). I per això, $\hat{P}_{90}\hat{P}_0\vec{E}_\theta = 0$. És a dir, no hi ha fotons que puguin travessar els dos polaritzadors.

De manera anàloga, \hat{P}_θ representa el polaritzador que únicament deixa passar la component \vec{E}_θ i absorbeix la component ortogonal. Si escrivim $\vec{E}_\theta = \cos\theta\vec{E}_0 + \sin\theta\vec{E}_{90}$, el vector unitari ortogonal és $\vec{E}_{90+\theta} = -\sin\theta\vec{E}_0 + \cos\theta\vec{E}_{90}$. Podem expressar aquests vectors en forma de matriu columna,

$$\vec{E}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{E}_{90+\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

La representació matricial de \vec{E}_0 i \vec{E}_{90} és $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per tant, és immediat adonar-se que el polaritzador \hat{P}_0 vindrà representat per la matriu que done compliment a les dues equacions matricials següents que representen deixar passar \vec{E}_0 i absorbir \vec{E}_{90} :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Quatre equacions amb quatre incògnites d'on deduïm que $a = 1$, $b = c = d = 0$, i.e., $\hat{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Anàlogament, podem trobar que $\hat{P}_{90} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Finalment, per determinar \hat{P}_θ considerem el sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

del qual deduïm que $\hat{P}_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$.

Anàlogament, podem trobar també que $\hat{P}_{90+\theta} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix}$.

Com vam discutir en la presentació del polaritzador de Dirac,[2] la seqüència $\hat{P}_0 \hat{P}_{90} \vec{E}_\alpha = 0$. En efecte:

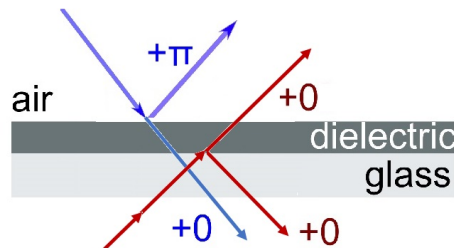
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mentre que $\hat{P}_0 \hat{P}_\theta \hat{P}_{90} \vec{E}_\alpha \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \cos \alpha \sin \theta \cos \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3 Representació matricial d'aparells complexos: l'interferòmetre de Mach-Zender

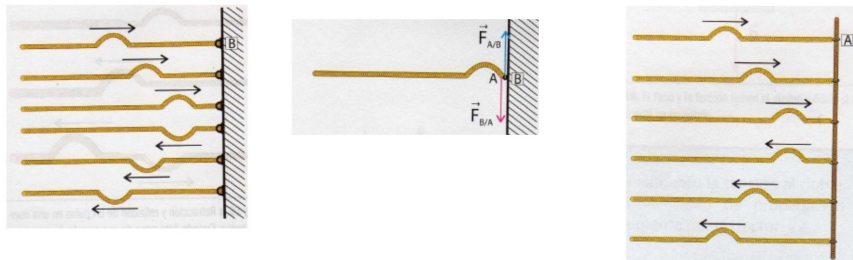
El prof. Barton Zwiebach, de l'MIT, ens presenta una versió matricial d'un altre aparell important,[3] com ho són d'importants els polaritzadors de Dirac, però més sofisticat: l'interferòmetre MZ de Mach-Zender. Amb aquest aparell hom pot discutir i comprovar experimentalment l'intricat fenomen de la superposició quàntica. Presentarem l'aparell en primer lloc, abans de procedir a representar-lo per una matriu. Bàsicament consta de dos espills, dos bifurcadors de feix (*beam splitters* BS) i dos detectors de llum. Aclarim que un bifurcador de feix o BS és un vidre recobert en una cara per un dielèctric **reflectant** que presenta un índex de refracció intermedi entre el del vidre i el de l'aire (vegeu figura):



Com indica la figura, en arribar el feix al BS, la meitat passa al seu través i la meitat se reflecta.² Si la reflexió s'efectua sobre un material amb índex de refracció més gran que el del medi d'on ve el feix, aleshores l'ona surt reflectida amb un canvi de fase π . Tanmateix, si la reflexió s'efectua sobre un material amb índex de refracció

²Considerem un BS ideal. En casos reals els percentatge de feix reflectit i refractat no necessàriament són el 50%-50%.

menor, l'ona que surt reflectida va en fase. El distint comportament pot explicar-se en aplicar una o altra condició frontera en la propagació de l'ona electromagnètica (veure e.g. cap. 7, sec. 3, pag. 302 de Jackson[4]). La imatge mecànica de la següent figura permet però copsar aquest fenomen d'una manera més simple, sense tindre que aprofundir en electrodinàmica.

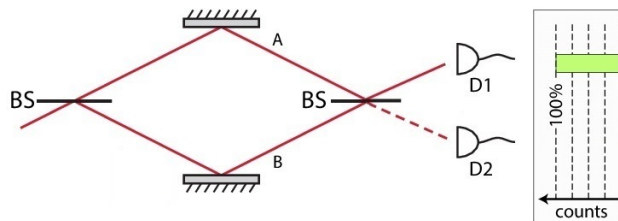


A la part esquerra de la figura hi ha una pulsació que se propaga en una corda la qual té un extrem rígidament unit a la paret. En aplegar la pulsació a la paret, aquesta exerceix un força cap amunt sobre l'ancoratge rígid, el qual, pel principi d'acció i reacció, torna sobre la corda una força igual i en sentit contrari (part central de la figura), força que arrastra la corda cap avall, de manera que quan torna la pulsació reflectida ho fa invertida, i.e., amb un desfase de π radians.

La paret, més rígida que la corda, representa un medi amb un índex de refracció gran.

Tanmateix, si en lloc d'un ancoratge rígid, la corda acaba en una argolla que pot desplaçar-se amunt i avall, en aplegar la pulsació, l'anella és espentada cap amunt seguint la corda, de manera que en reflectir-se la pulsació, aquesta no canvia la seua fase (part dreta de la figura). L'argolla, més flexible que la corda, representa un medi amb un índex de refracció petit.

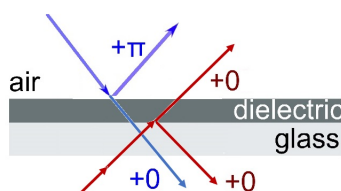
Ara ja estem en condicions de descriure l'interferòmetre MZ (vegeu la figura següent):



Hi ha un primer bifurcador BS_1 que té el dielèctric reflectant en la part superior del vidre, mentre que el segon el té en la part inferior. Podem fer aplegar la llum per dalt, que ho representem amb $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ o per baix, que ho representem per $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tanmateix poden aplegar dos feixos simultàniament que representariem amb $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, de manera que el mòdul d'aquest vector, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, representa la intensitat, mentre que cada component

és l'amplitud.³ A l'exemple de la figura aplega el feix per davall, i.e., $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La meitat continua el seu camí (òbviament sense alteració de la fase) mentre que l'altra meitat sofreix reflexió que, com el feix ve per baix, travessa el vidre, aplega al dielèctric reflectant i se reflecteix sobre la interfase amb aquest medi de menor índex de refracció. Per tant, no canvia la fase.

Els dos espills no fan altre paper que *doblar* els feixos per fer-los incidir sobre el segon bifurcador BS₂, el qual té el recobriment reflectant en la base. En aquest cas, el feix que aplega per baix se reflexa amb canvi de fase ($n_{diel} > n_{aire}$), mentre que el que aplega per dalt manté la fase ($n_{diel} < n_{vidre}$). Per supost, el 50% no reflectit conserva la fase.



Com a resultat, sobre el detector inferior no aplega senyal, atès que el 50% presenta una fase i l'altre 50% presenta la contrària, produint-se una interferència destructiva. Sobre el detector superior aplega doncs 50%+50%=100% de feix.

Un comentari col·lateral, però interessant: la interferència en BS₂ **no** és entre dos fotons, sinó entre un fotó i ell mateix. En efecte, si per exemple dos fotons fan interferència destructiva, de dos fotons passem a zero fotons, violant la conservació d'energia. Cada fotó està doncs en un estat que és superposició de dos estats, un en el que el fotó va pel camí superior i un el que el fotó va per l'inferior, i.e., és com si el fotó anara simultàniament pels dos camins. Així, entra un fotó $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en BS₁ d'on surt el fotó en l'estat $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, i.e., el 50% per dalt i el 50% per baix. La matriu que representa BS₁, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ha de ser tal que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

el signe menys deriva del fet que la reflexió aire-dielèctric canvia la fase ($n_{aire} < n_{diel}$). Tenim doncs quatre equacions amb quatre incògnites, el resultat de les quals és $a = -\sqrt{2}$, $b = c = d = \sqrt{2}$, de manera que:

$$BS_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un raonament anàleg condueix a que:

$$BS_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

³El quadrat de l'amplitud és la intensitat, com hem comentat adès en parlar dels polaritzadors de Dirac.

Per tant, l'interferòmetre MZ queda representat per

$$MZ = BS_2 * BS_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

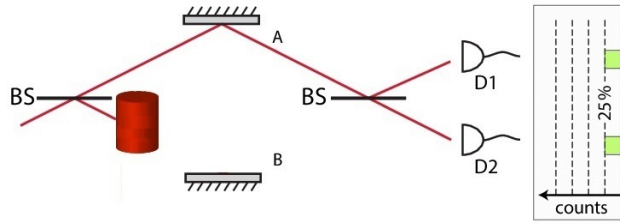
de manera que si entra el fotó per baix, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ surt pel detector superior,

$$MZ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre que si entra el fotó per dalt, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, surt pel detector inferior amb la fase canviada:

$$MZ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Què passa si afegim un bloc B que impedeix el trànsit pel camí inferior? (vegeu figura)



Abans d'aplegar a B l'estat del fotó és $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per tant, B actua a manera de projector, i.e. $\hat{P}_B \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per tant tenim dues equacions matricials per determinar la representació matricial de B :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{P}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

de manera idèntica al que havíem vist amb els polaritzadors de Dirac.

Aleshores, el dispositiu modificat de MZ se representa per,

$$MZ_{mod} = BS_2 * P_B * PS_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de manera que:

$$MZ_{mod} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

És a dir, amb una probabilitat $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ surt el fotó pel detector superior i amb una probabilitat $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ per l'inferior. Per tant, hi ha una probabilitat $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ de que no se detecte perquè quede absorbit en el bloc B .

Avshalon Elitzur i Lev Vaidman, de la universitat de Tel-Aviv d'Israel, van imaginar un dispositiu semblant per verificar el funcionament correcte del sensor de bombes activades amb un fotó, sense fer-les explotar.[5] (El dispositiu de Elitzur-Vaidman en lloc d'un bloc B hi ha una bomba activable si un fotó que aplega a un detector que té).

References

- [1] J.Planelles, *Teoria de Grups de Simetria*, Col·lecció Material Docent, Publicacions de la Universitat Jaume I (Castelló) 1996.
- [2] J.Planelles, *Noves notes de Química Quàntica*, Col·lecció Sapienta , Publicacions de la Universitat Jaume I (Castelló) 2009, Cap. 1.
- [3] <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/video-lectures/index.htm>
- [4] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and sons, USA 1999.
- [5] A.C. Elitzur and L: Vaidman, *Found. Phys.*, 23 (1993) 987-997. (arXiv:hep-th/9305002v2). Veure també wikipèdia: només escriure en google: wikipedia Elitzur-Vaidman i entrar en alguna de les primeres entrades.