La dualitat ona-corpuscle és el cor de la mecànica quàntica i una gran paradoxa. La teoria quàntica del camp de la radiació i la matèria resol els problemes d'identitat de partícules i ones i soluciona possiblement aquesta paradoxa. L'objectiu d'aquestes notes és donar una mirada somera, per amateurs i curiosos, a la teoria de camps, centrant-nos en el cas més senzill, però no per això menys important, del camp escalar real.

Teoria de camps per amateurs i curiosos

Josep Planelles

Teoria de camps per amateurs i curiosos

Josep Planelles

Introducció

La dualitat ona-corpuscle de Louis de Broglie és part essencial del cor de la mecànica quàntica a la vegada que és una gran paradoxa: com es pot ser una partícula, és a dir una entitat perfectament localitzada en l'espai, separada del medi exterior per una frontera i, simultàniament, ser una ona, és a dir, una pertorbació d'un medi extens sense fronteres? Per poder seguir avant en els cursos introductoris de mecànica quàntica s'introdueix la transaccional que ona i corpuscle són descripcions *aproximades i complementàries* del comportament experimental, tant de la matèria com de la radiació. Per tant, les partícules que observem no són exactament entitats localitzades amb frontera ni les ones són exactament pertorbacions sense fronteres. I, aleshores, se segueix amb el desenvolupament d'una teoria que explica el comportament d'objectes que no sabem exactament què són. Considerem per exemple la radiació monocromàtica de color blau i les seues partícules: els fotons blaus (altres colors, és a dir altres freqüències, tenen fotons d'altres colors, és a dir, d'altres energies). De fet, els fotons blaus no poden ser partícules puntuals perquè els propis principis de la mecànica quàntica impliquen que no es pot "trobar" un fotó en un lloc específic, atès que sabem exactament quin és el seu moment lineal. La teoria quàntica del camp de la radiació i la matèria aclareix els problemes d'identitat de partícules i soluciona possiblement la paradoxa ona-partícula.[1] Tanmateix és la visió acceptada de la física contemporània i el seu punt de vista podria també ser la base conceptual per a l'ensenyament de la mecànica quàntica no relativista. Al remat, la mecànica quàntica no relativista no és més que la teoria del camp de l'ona de Schrödinger.

L'objectiu d'aquestes notes és donar una mirada somera, per amateurs i curiosos, a la teoria de camps i per això sols parlarem del camp més senzill: el camp escalar real.[2] He de dir que hi ha una extensa literatura de llibres sobre teoria quàntica de camps, alguns d'ells escrits de manera especialment didàctica. Per a elaborar aquestes notes he usat diverses fonts, entre les que destacaria els llibres de Lancaster i Blunder[3] i Ashok Das[4], encara que n'he consultat altres[5] així com diverses *lectures notes* accessibles via internet en un intent de trobar la manera més senzilla i intuïtiva de presentar els camps. En les apunts hi ha deduccions i aclariments que podrien trencar el fil però com, encara que amateur o curiós, en ciència cal no fer cap acte de fe, he desgranat en apèndixs i peus de pàgina alguns d'aquests aclariments i demostracions. Espero que aquestes notes siguen d'utilitat a amateurs i curiosos o algun estudiant d'alguna branca de ciències o enginyeria, com una espècie d'entremès que done confiança per endinsar-se en les fonts per aconseguir anar més enllà de la mirada somera.

---

[1] Art Hobson, *Am. J. Phys.* 73, (2005) 630-634.

[2] No per ser és més senzill el camp escalar real és poc rellevant: és el camp que origina l'equació quàntica-relativista de Klein-Gordon d'on se poden derivar les equacions de Proca que estan implicades en el model Standard per descriure el comportament de bosons vectorials massius que transporten la interacció feble, generen el potencial de Yukawa associat amb la interacció forta, fins i tot descriu l'electrodinàmica en superconductors (veure e.g. M. Tajmar, Phys. Lett. A 372(2008) 3289–3291).

[3] T. Lancaster and S.J. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*, Oxford 2014.

[4] Ashok Das, Lectures on Quantum Field Theory, World Scientific 2008.

[5] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, CRC Press Boca Raton 2018, H. Haken, *Quantum Field Theory of Solids, an Introduction*, North-Holland 1983, A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press 2010, etc.

El camp clàssic

En uns apunts anteriors[6] hem estudiant l'exemple de la corda oscil·lant de massa m i longitud ℓ en el cas més simple de forces elàstiques. A partir de la densitat de massa $\rho = m/\ell$ i la constant de força k que genera tensió quan el camp $\phi(x,t)$ se separa de la seua posició d'equilibri, hem definit l'energia cinètica $T = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx\, \rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2$ i la potencial $V = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx\, k \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2$, i construït la densitat Lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 = k\left[\frac{1}{2}\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]$, que inserta en l'equació $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0$ d'Euler-Lagrange, dóna lloc a l'equació de del moviment ondulatori clàssic de D'Alembert:[7] $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$.

Aleshores, hem afegit un terme d'energia potencial proporcional al camp, $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, en la Lagrangiana $\mathcal{L}$ i, amb les equacions d'Euler-Lagrange, hem obtingut l'equació de Klein-Gordon:[8] $\partial_\mu^2\phi + m^2\phi = 0$ on ∂_μ^2 inclou derivades en x, y, z, t. Concretament[9] $\partial_\mu^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2$. Per a detalls en l'obtenció de les equacions podeu ajudar-vos dels peus de pàgina i/o acudir als apunts esmentats (vegeu l'enllaç també a peu de pàgina).

Val a dir que aquests dos exemples són particularment simples però importants.[10] Ací ens centrarem en la segon equació anomenada de Klein-Gordon.[11] Per substitució directa, podem comprovar que aquesta equació té solucions en forma d'ones planes: $\phi = e^{-i(Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$ amb la condició que $E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$, on la quantitat m té un paper semblant a la massa en teoria de relativitat. La solució general és doncs, una superposició d'aquestes ones planes:[12]

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\,E_{\boldsymbol{p}}}}\left[A_{\boldsymbol{p}}e^{-i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} + A_{\boldsymbol{p}}^{*}e^{i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\right] \qquad (1)$$

Abans de fer el pas a la quantificació d'aquest camp és convenient obtenir l'Hamiltoniana clàssica ($\mathcal{H} = pq - \mathcal{L}$). Els detalls de l'obtenció de l'Hamiltonià $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$, que reescrivim com $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$, suma d'un terme d'energia cinètica més un de potencial tipus harmònic, el presentem en l'apèndix 1 per no trencar la lectura amb detalls.

---

[6] Per a detalls podeu acudir a J. Planelles 2025, *Unificant la descripció d'ones i partícules amb principis variacionals*, http://www3.uji.es/~planelle/divulgacio/Ones_i_particules.pdf

[7] Com en l'equació d'Euler-Lagrange sols apareixen derivades, $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}/k$ generen la mateixa equació. És a dir, la constant k desapareix.

[8] En afegir $U(\phi)$ i canviar el nom de la velocitat v per c, la Lagrangiana resulta: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$.

[9] El signe menys en $\boldsymbol{\nabla}^2$deriva dels signes de la Lagrangiana, però podem, a posteriori, interpretar en seu origen en la mètrica relativista $g^{\mu\nu}(+,-,-,-)$ de l'espai de punts $\vec{s} = (ct, x, y, x)$ en quatre dimensions. La norma d'un vector d'un espai ortogonal real és la suma dels quadrats de les seues components. En general però el quadrat de la norma s'ha de calcular amb la mètrica: $(ds)^2 = ds^\mu ds_\mu = g^{\mu\nu}ds_\nu ds_\mu$. Concretament: $\partial^2 = \partial^\mu\partial_\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2$.

[10] Aquests dos exemples són particularment importants perquè del primer se poden derivar les equacions de Maxwell de l'electromagnetisme i del segon les equacions de Proca, les quals estan implicades en el model Standard per descriure el comportament de bosons vectorials massius que transporten la interacció feble, generen el potencial de Yukawa associat amb la interacció forta, fins i tot descriu l'electrodinàmica en superconductors (veure e.g. M. Tajmar, Phys. Lett. A 372(2008) 3289–3291).

[11] Aquesta equació porta els noms d'Oskar Klein i Walter Gordon, però va ser proposada originalment per Erwin Schrödinger com l'equació per a la funció d'ona d'una partícula quàntica. No obstant això, en trobar problemes en la interpretació de la densitat de corrent i les energies negatives, Schrödinger va considerar més adequat passar a una versió no relativista de l'equació que és la que actualment es coneix com a equació de Schrödinger.

[12] Els factors que apareixen fora del claudàtor podien perfectament quedar absorbits dins de $A_{\boldsymbol{p}}$ i $A_{\boldsymbol{p}}^{*}$. S'expliciten per conveniència. Al llarg de les notes se justificarà el seu valor concret.

Cadena d'oscil·ladors acoblats, modes normals i transformada de Fourier

Podem considerar que la corda de massa m i longitud ℓ, que hem introduït en l'apartat anterior, està formada per petits oscil·ladors acoblats amb forces elàstiques. Amb la densitat de massa $\rho = m/\ell$ i la constant de força k_0, que genera la tensió si el camp $\phi(x,t)$ se separa de la posició d'equilibri, escrivim l'energia cinètica $T = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx\, \rho\, \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2$ i potencial[13] $V = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx\, k_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2$, i amb elles l'Hamiltonià: $H = \int dx\, \left[\frac{1}{2\rho}p^2 + \frac{k_0}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right]$, amb $p(x,t) = \rho\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$.

El terme potencial que implica interacció entre oscil·ladors veïns impedeix escriure l'energia de la corda com suma d'energies d'oscil·ladors independents. Cal obtenir els modes normals per a fer-ho possible. Amb aquesta finalitat escrivim les transformades de Fourier[14] dels camps ϕ i p. $\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{\phi}(k) e^{ikx}$; $p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{p}(k) e^{ikx}$ i el delta de Dirac:[15] $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$.

Calculem termes de l'Hamiltonià:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, p^2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{p}(k) e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dk'\, \tilde{p}(k') e^{ik'x} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, dk'\ \tilde{p}(k)\, \tilde{p}(k') \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k+k')x}$$

La integral sobre dx és 2π vegades el delta de Dirac $\delta(k-k')$, amb la qual cosa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, p^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{p}(-k)\, \tilde{p}(k)$$

Anàlogament,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{\phi}(k)(ik) e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dk'\, \tilde{\phi}(k')(ik') e^{ik'x} =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, dk'\ \tilde{\phi}(k)\, \tilde{\phi}(k')\, k\, k' \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k+k')x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^2\, \tilde{\phi}(-k)\, \tilde{\phi}(k)$$

Portant-ho a l'Hamiltonià trobem:

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left[\frac{1}{2\rho}\tilde{p}(-k)\, \tilde{p}(k) + \frac{\rho\omega_k^2}{2}\tilde{\phi}(-k)\, \tilde{\phi}(k)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathcal{H}(k)$$

on hem definit $\omega_k = k\sqrt{\frac{k_0}{\rho}} = k\omega_0$ i observem H com la suma d'hamiltonians $\mathcal{H}$ tipus oscil·lador harmònic independents.

Si procedim a quantificar, substituint coordenada i moment per operadors, com els operadors $\hat{\phi}(x)$ i $\hat{p}(x)$ han de ser hermítics, aleshores, des de: $\hat{\phi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{\phi}(k) e^{ikx}$; $\hat{p}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{p}(k) e^{ikx}$, trobem que cal que: $\hat{\phi}(k)^+ = \hat{\phi}(-k)$ i $\hat{p}(k)^+ = \hat{p}(-k)$. Per tant:

$$\mathcal{H}(k) = \frac{1}{2\rho}\hat{p}(k)^+\hat{p}(k) + \frac{\rho\omega_k^2}{2}\hat{\phi}(k)^+\hat{\phi}(k) = \frac{1}{2\rho}\hat{p}(k)^2 + \frac{\rho\omega_k^2}{2}\hat{\phi}(k)^2 = \hbar\omega_k\, \left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\right)$$

on la última igualtat s'ha fet amb la definició Standard de creadors i aniquiladors en termes de moment i coordenada.

---

[13] En el cas discret $F = -k\Delta x$. En una corda $\delta\mathcal{F} = -k\, \phi' dx$ i la densitat potencial $\mathcal{V} = \frac{1}{2}\, k\, (\phi')^2$.

[14] Recordem la definició de la transformada: $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}$.

[15] Vegeu-ho a l'apèndix 2.

El camp quàntic

Mostrarem que quan quantifiquem el camp ϕ, en lloc dels coeficients clàssics $A_{\boldsymbol{p}}$, $A_{\boldsymbol{p}}^*$, apareixen els operadors d'aniquilació $a_{\boldsymbol{p}}$ i de creació $a_{\boldsymbol{p}}^+$, que donen compliment a les regles de commutació bosòniques $\left[a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{q}}^+\right] = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}, -\boldsymbol{q})$ amb les quals, l'Hamiltonià quedarà finalment escrit: $H = \int d^3p\, E_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}}^+ a_{\boldsymbol{p}}$, semblant al d'un oscil·lador harmònic.

L'estat fonamental (que en QFT s'anomena el buit) és l'estat sense partícules $|0\rangle$ i la primera excitació del camp correspon a un estat de partícula creada per $a_{\boldsymbol{p}}^+$: $|\boldsymbol{p}\rangle = a_{\boldsymbol{p}}^+|0\rangle$. L'energia d'aquest estat resultarà ser $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, que correspon a la típica relació de dispersió relativista. En repòs, i.e., ($\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$), tenim $E = m$. Aquesta expressió ens diu que m és l'energia mínima d'una excitació del camp, i per tant es pot interpretar com la massa de la partícula associada. Així doncs, la massa apareix en teoria clàssica de camps com un terme en l'equació de moviment, mentre que en teoria quàntica de camps, correspon a l'energia mínima per excitar el buit i crear una partícula del camp. En estat sòlid el buit es correspon amb el nivell de Fermi i a l'energia mínima per excitar una quasipartícula des del nivell de Fermi s'anomena el gap. Per tant en estat sòlid el gap és l'anàleg de la massa en teoria de camps.

Com hem comentat abans, les ones planes són solucions de l'equació del Klein- Gordon i, per tant, podem escriure el camp en aquesta base com indica l'equació (1). podem escriure de manera compacta i amb una notació semblant a la de la secció anterior,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k\, \tilde{\phi}(k) e^{-i\,k\cdot x}$$

On veiem que $\phi(x)$ i $\tilde{\phi}(k)$, excepte un factor multiplicatiu, la convinença del qual la veurem després, són transformades de Fourier una de l'altra i hem usat la notació $x = (t, \boldsymbol{x})$, i en l'exponent $k \cdot x = k^0x^0 - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}$. Si introduïm $\phi(x)$ en l'equació $\partial_\mu^2\phi + m^2\phi = 0$ de Klein-Gordon trobem

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k\, (-k^2 + m^2)\, \tilde{\phi}(k) e^{-i\,k\cdot x} = 0$$

Que implica que $k^2 = m^2$ si no volem que $\tilde{\phi}(k)$ siga zero. És a dir, en la transformada de Fourier sols entren ones planes definides per $k^2 = (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 = m^2$, i.e. $k^0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2} = \pm E_k$. Per tant, escriurem la transformada $\tilde{\phi}(k) = \delta(k^2 - m^2)a(k)$ on l'operador $a(k)$ ja no està limitat per l'equació de moviment i reescrivim el camp en la següent forma:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k\, \delta(k^2 - m^2)\, e^{-i\,k\cdot x} a(k)$$

A l'apèndix 2 demostrem la identitat $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$ on x_i són les arrels de l'equació $g(x) = 0$. En aquest cas, $g(x) = k^2 - m^2 = (k^0)^2 - E_k^2$ que presenta dues arrels $\pm E_k$, i té una derivada $g'(x) = 2k^0 = 2|\pm E_k| = 2E_k$. Per tant,

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta\big((k^0)^2 - E_k^2\big) = \frac{1}{2E_k}\big(\delta(k^0 - E_k) + \delta(k^0 + E_k)\big)$$

Que portat al camp dóna lloc a:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk^0\, d^3k\, \frac{1}{2E_k} [\delta(k^0 - E_k) + \delta(k^0 + E_k)]\, e^{-i\,k^0\cdot x^0 + i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\; a(k^0, \boldsymbol{k})$$

Aplicant els delta de Dirac eliminem una integral i obtenim:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, \frac{1}{2E_k} \left[e^{-i\, E_k \cdot x^0 + i\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \, a(E_k, \boldsymbol{k}) + e^{i\, E_k \cdot x^0 + i\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \, a(-E_k, \boldsymbol{k}) \right]$$

Amb el canvi $\boldsymbol{k}$ per $-\boldsymbol{k}$ en el segon terme (a la integral entre límits infinits tant li fa l'ordre en què fem la suma) i identificant k^0 amb la solució positiva $E_k > 0$ (les energies poden ser positives o negatives però k^0 el considerem positiu) obtenim:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{2k^0} \left[e^{-ik\cdot x} \, a(k) + e^{i\, k\cdot x} \, a(-k) \right]$$

El camp és real, per tant, l'operador associat $\hat{\phi}(x)$ és hermític: $\hat{\phi}^+(x) = \hat{\phi}(x)$.[16] En conseqüència, com en l'apartat anterior, : $\hat{a}(k)^+ = \hat{a}(-k)$, $\hat{a}(-k)^+ = \hat{a}(k)$.
Finalment, com que cal que $k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2} > 0$, realment els operadors $a(k)$ són únicament funció de $\boldsymbol{k}$. Per això és costum definir el operadors $a(\boldsymbol{k}) = a(k)/\sqrt{2k^0}$, $a^+(\boldsymbol{k}) = a^+(k)/\sqrt{2k^0}$ i expressar l'operador camp en la forma:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}} \left[e^{-ik\cdot x} \, \hat{a}(\boldsymbol{k}) + e^{i\, k\cdot x} \, \hat{a}^+(\boldsymbol{k}) \right] \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2E_{\boldsymbol{p}})^{1/2}} \left[e^{-i\, p\cdot x} \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}} + e^{i\, p\cdot x} \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^+ \right]$$

Considerem finalment l'Hamiltonià $H = \int d^3x \, \{[\partial_0 \, \hat{\phi}(x)]^2 + [\boldsymbol{\nabla} \, \hat{\phi}(x)]^2 + m^2[\hat{\phi}(x)]^2\}$. Cal substituir el camp i efectuar les derivacions. Per exemple:[17]

$$\partial_0 \, \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2E_{\boldsymbol{p}})^{1/2}} (-iE_{\boldsymbol{p}}) \left(e^{-i\, p\cdot x} \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}} - e^{i\, p\cdot x} \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^+ \right)$$

Anàlogament,

$$\boldsymbol{\nabla} \, \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2E_{\boldsymbol{p}})^{1/2}} (i\boldsymbol{p}) \left(e^{-i\, p\cdot x} \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}} - e^{i\, p\cdot x} \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^+ \right)$$

Que portats a l'expressió de la Hamiltonià i després d'un procediment similar al de l'apartat anterior de la corda oscil·lant que ometem[18] dóna lloc a un resultat semblant al de la corda:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3p \, E_{\boldsymbol{p}} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{p}} \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^+ + \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^+ \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}} \right)$$

Les relacions de commutació d'aquests creadors de camp continu substitueixen les deltes de Kronecker per deltes de Dirac: $\left[\hat{a}_{\boldsymbol{p}}, \hat{a}_{\boldsymbol{p}'}^+\right] = \delta^3(p - p')$. Aleshores el Hamiltonià resulta:

$$H = \int d^3p \, E_{\boldsymbol{p}} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^+ \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{2} \delta^3(0). \right)$$

...que comporta una contribució infinita a l'energia! El problema deriva del fet que l'ordenació dels operadors, en el pas de la mecànica clàssica a la quàntica, és sempre ambigu. Per tal d'evitar l'infinit que hem trobat definim el pas a mecànica quàntica amb *ordenació normal* dels operadors, és a dir, que sempre els operadors de creació estaran a l'esquerra dels d'aniquilació. Amb aquesta definició $H = \int d^3p \, E_{\boldsymbol{p}} \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^+ \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}} = \int d^3p \, E_{\boldsymbol{p}} \, \hat{n}_{\boldsymbol{p}}$, amb $\hat{n}_{\boldsymbol{p}} = \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^+ \, \hat{a}_{\boldsymbol{p}}$, l'operador número. L'ordenació normal ens permet evitar la contribució infinita de l'energia del buit que origina $\delta^3(0)$. En aquest nou Hamiltonià, l'energia del sistema és simplement la suma de les energies de

[16] De la mateixa manera que en l'apartat anterior, corresponent a la corda oscil·lant i l'equació de D'Alembert, definim operadors del camp ϕ i la seua transformada de Fourier ($a(k)$ en aquest cas).

[17] Adoneu-vos del canvi de signe de dins del claudàtor per poder extreure $(-iE_{\boldsymbol{p}})$ de factor comú.

[18] El procediment està detalladament descrit en pags. 180-183 de Ashok Das, *Lectures on Quantum Field Theory*, World Scientific 2008. També en la secció 11.3 de T. Lancaster and S.J. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*, Oxford 2014.

cada partícula present en l'estat, en línia amb la interpretació d'un camp quàntic com un conjunt d'oscil·ladors harmònics acoblats.

Aleshores si representem per $|E_{\boldsymbol{p}}\rangle$ els autovectors de l'Hamiltonià, trobem que l'energia del sistema és positiva:

$$E = \langle E|H|E\rangle = \langle E|\int d^3p\, E_{\boldsymbol{p}}\, \hat{a}^+_{\boldsymbol{p}}\, \hat{a}_{\boldsymbol{p}}\, |E\rangle = \int d^3p\, E_{\boldsymbol{p}} \langle E|\, \hat{a}^+_{\boldsymbol{p}}\, \hat{a}_{\boldsymbol{p}}\, |E\rangle \geq 0$$

De la definició del creadors i aniquiladors podem comprovar que, de manera paral·lela al que passava amb l'oscil·lador harmònic: $[\mathcal{H}, b] = -\hbar\omega b$, $[\mathcal{H}, b^+] = \hbar\omega b^+$, també $[\hat{a}_{\boldsymbol{p}}, H] = E_{\boldsymbol{p}}\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$, $[\hat{a}^+_{\boldsymbol{p}}, H] = -E_{\boldsymbol{p}}\hat{a}^+_{\boldsymbol{p}}$ i per tant, $H\hat{a}_{\boldsymbol{p}}|E\rangle = (E - E_{\boldsymbol{p}})\hat{a}_{\boldsymbol{p}}|E\rangle$ i $H\hat{a}^+_{\boldsymbol{p}}|E\rangle = (E + E_{\boldsymbol{p}})\hat{a}^+_{\boldsymbol{p}}|E\rangle$.

En paral·lel a la definició $H = \int d^3p\, E_{\boldsymbol{p}}\, \hat{n}_{\boldsymbol{p}}$, podem definir $N = \int d^3p\, \hat{n}_{\boldsymbol{p}}$ i $\boldsymbol{P} = \int d^3p\, \boldsymbol{p}\, \hat{n}_{\boldsymbol{p}}$, de manera que:

$$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_\ell,\ E = n_1 E_{\boldsymbol{p}1} + n_2 E_{\boldsymbol{p}2} + \cdots + n_\ell E_{\boldsymbol{p}\ell} \text{ i } \boldsymbol{P} = n_1\boldsymbol{p}_1 + n_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + n_\ell\boldsymbol{p}_\ell$$

que descriu els diversos estats de l'equació de Klein-Gordon com una col·lecció de partícules amb una energia i moment determinat.

Finalment, des de $H|E_{\boldsymbol{p}}\rangle = E_{\boldsymbol{p}}|E_{\boldsymbol{p}}\rangle$, $\boldsymbol{P}|E_{\boldsymbol{p}}\rangle = \boldsymbol{p}|E_{\boldsymbol{p}}\rangle$, deduïm que:

$$(H^2 - \boldsymbol{P}^2)|E_{\boldsymbol{p}}\rangle = \left(E^2_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}^2\right)|E_{\boldsymbol{p}}\rangle = m^2|E_{\boldsymbol{p}}\rangle$$

per tant, compleix l'equació de Klein-Gordon d'una partícula amb energia $E_{\boldsymbol{p}}$ i, per tant, podem pensar en aquest com l'estat d'una partícula amb un quadri-moment $k = (E_{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p})$.

L'operador camp

L'operador[19] $\hat{\psi}^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2E_{\boldsymbol{p}})^{1/2}}\, e^{i\,p\cdot x}\, \hat{a}^+_{\boldsymbol{p}}$ aplicat sobre l'estat buit $|0\rangle$ genera l'estat $|\psi\rangle$. Comprovem que aquest operador crea una partícula en un lloc específic de l'espai. Anomenem $|y\rangle$ a l'estat propi de la coordenada de valor propi la posició y. Projectem $|\psi\rangle$ sobre aquest estat:

$$\langle y|\psi\rangle = \langle y|\hat{\psi}^+(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2E_{\boldsymbol{p}})^{1/2}}\, e^{i\,p\cdot x}\, \langle y|\, \hat{a}^+_{\boldsymbol{p}}\, |0\rangle$$

Saben que la funció pròpia del moment, l'ona plana, s'escriu en termes de coordenades com $e^{-i\,p\cdot x}$, calculem $\langle y|\, \hat{a}^+_{\boldsymbol{p}}\, |0\rangle = \langle y|p\rangle = e^{-i\,p\cdot y}$, aleshores $\langle y|\psi\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2E_{\boldsymbol{p}})^{1/2}}\, e^{i\,p\cdot(x-y)}$.

Si comparem amb el delta de Dirac, $\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\,p\cdot(x-y)}$, veiem que aquest estat no és un perfecte delta de Dirac, sinó que el factor $1/(2E_{\boldsymbol{p}})^{1/2}$ fa que s'escampe en les rodalies de la posició $\boldsymbol{y}$.

Cal dir que en el límit no relativista on $E_{\boldsymbol{p}} \approx m$ (és a dir on l'energia en repòs domina), aquest terme passa a ser una constant i surt fora de la integral, de manera que la funció és exactament un delta de Dirac. En teoria relativista de camps, la presència de $1/(2E_{\boldsymbol{p}})^{1/2}$ fa que l'estat no siga exactament una auto-funció de la posició. És més bé un "paquet d'ones" intensament concentrat al voltant de la posició $\boldsymbol{y}$.

[19] Adonem-nos que: $\hat{\phi}(x) = \hat{\psi}^+(x) + \hat{\psi}(x)$

Apèndix 1: Lagrangiana i Hamiltoniana de Klein-Gordon

La fórmula general per obtenir la Hamiltoniana a partir de la Lagrangiana en un sistema amb múltiples coordenades generalitzades és: $\mathcal{H} = \sum_i \Pi_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$, on $\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ són els moments conjugats.

Per un camp escalar relativista, la Lagrangiana és una densitat lagrangiana $\mathcal{L}$, i les seues variables són el camp $\phi(x, y, z, t)$ i les seues derivades $\partial_\mu \phi$. Aleshores escrivim $\mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi)$, $\mu = x, y, z, t$.[20]

El moment conjugat, en aquest cas, és només la component temporal del quadri-moment, és a dir, $\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$. Això fa que la definició de la hamiltoniana siga: $\mathcal{H} = \Pi^0 \dot{\phi} - \mathcal{L}$.

L'equació de Klein-Gordon, $\partial_\mu^2 \phi + m^2 \phi = 0$, deriva de la densitat lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$, i presenta un dispersió $E_p^2 = p^2 + m^2$. La component temporal del moment, $\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}$, ens permet trobar la Hamiltoniana: $\mathcal{H} = \Pi^0 \partial_0 \phi - \mathcal{L}$. Derivant $\mathcal{L}$ respecte $\partial_0 \phi$ trobem $\Pi^0 = \partial_0 \phi$, per tant, $\mathcal{H} = (\partial_0 \phi)^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$, que podem reescriure de manera més habitual $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}(\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ o de manera condensada $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$, i que podem interpretar com la suma d'energia cinètica més potencial, encara que en l'energia cinètica distingim un terme d'energia cinètica que reflecteix els canvis en la configuració en el temps, i un terme de "cisalla" que dóna un cost energètic per als canvis espacials en el camp. Finalment tenim un terme potencial de "massa" que reflecteix el cost energètic per existir el camp en l'espai.

Apèndix 2: Delta de Dirac

Podem representar el Delta com el límit $n \to \infty$ de la funció $\delta_n(\omega) = \frac{Sin\, n\omega}{\pi \omega}$ la qual, amb el π en el denominador, està normalitzada: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sin\, n\omega}{\pi\omega} d\omega = 1$, (es pot comprovar e.g. amb Mathematica).

$\delta_n(\omega)$ es pot escriure en forma d'integral: $\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i\omega}[e^{i\omega t}]_{-n}^{n} = \frac{Sin\, n\omega}{\pi\omega}$, per tant, el delta de Dirac també: $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$. Si el delta està centrada en ω_0 aleshores:

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt \qquad \text{(X.1)}$$

Per tant, el Delta centrat en ω_0 és la transformada de Fourier de l'ona plana $f(t) = e^{-i\omega_0 t}$

Demostrarem ara que:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \qquad \text{(X.2)}$$

on la suma s'estén a totes les arrels x_i de $g(x) = 0$.

[20] El camp escalar $\phi(x^\mu)$està definit a tot l'espai-temps, i les seves variables són simplement les coordenades del sistema de referència que triem per descriure'l. No estem seguint la trajectòria d'una partícula, sinó descrivint l'evolució d'un camp en funció de l'espai i el temps. Si volguérem descriure una partícula puntual en relativitat, aleshores treballaríem amb el seu temps propi τ, i les seves coordenades variarien com $x^\mu(\tau)$. Però en teoria de camps, ens interessa el valor del camp en cada punt de l'espai-temps, i no la trajectòria d'una partícula en concret.

Escrivim $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx$, on assumim que dx és positiva. Fem el canvi $u = g(x)$, d'on tenim que $dx = \frac{du}{g'(x)}$, que canviem a $dx = \frac{du}{|g'(x)|}$ per fer el canvi de variable en la integral,[21] i com $\delta(g(x))$ és zero excepte en les arrels x_i on $g(x) = 0$, escrivim la integral com suma d'integrals sobre intervals centrats en les diferents x_i: $I = \sum_i \int_{x<x_i}^{x>x_i} f(x)\delta(g(x))dx$.

Apliquem el canvi a cada subintegral, centrada al voltant de x_i, que ara estarà centrada al voltant de $u = 0$, de manera que resulta: $\int \frac{f(x)}{|g'(x)|}\delta(u)du = \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$. Per tant, la integral total, suma de tots els intervals, queda $I = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$. Per tant, $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$.

[21]Considerem la integral $I = \int_a^b f(g(x))\,dx$. Fem el canvi $y = g(x)$ i, per tant, $dx = \frac{dy}{g'(x)}$.
Tenim $I = \int_a^b f(g(x))\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\frac{dy}{g'(x)}$. Si $g'(x) < 0$, com $dx > 0$, resulta que $dy < 0$.
Si volem, com és habitual, que $dy > 0$ hem de canviar els límits d'integració: $\int_{g(b)}^{g(a)} f(y)\,\frac{dy}{g'(x)}$.
Independent del signe de la derivada, podem mantenir el límits, si escrivim $dx = \frac{dy}{|g'(x)|}$.
En resum, $I = \int_a^b f(g(x))\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,J(y)\,dy$, on $J(y) = |\frac{dx}{dy}| = \frac{1}{|g'(x)|}$ és el Jacobià de la transformació.