Un dels primers models matemàtics utilitzat per estudiar l' evolució de les epidèmies és el model de Kermack-McKendic. En aquest model anomenem:

Nt a la població total
sa a la població que no ha emmalaltit
in a la població infectada o malalta
rec a la població que ha emmalaltit i s'ha recuperat

Aquest model assumeix que la mortalitat i la natalitat són relativament baixes i se compensen, de manera que la població total és la suma de la sana més la malalta més la recuperada.

Assumeix que la velocitat de creixement de població que encara no ha emmalaltit d(sa)/dt és proporcional a la població que no ha emmalaltit i també a la que està infectada:

-d(sa)/dt= ks*sa*in

ks és la constant de proporcionalitat (que haurà de ser ajustada a les dades experimentals).

Tanmateix, assumeix que la velocitat de variació de nombre d'infectats (d(in)/dt) és el balanç entre els que s'infecten menys els que es recuperen:

d(in)/dt=ks*sa*in-ki*in

ki és l'altra constant de proporcionalitat a ser ajustada.

Finalment, i d'acord amb el que acabem de dir, la velocitat de recuperació serà proporcional al nombre d'infectats (persones susceptibles de recuperar):

d(rec)/dt=ki*in

Aquest model pot millorar-se incloent la tassa de defuncions i de naixements, que fa que la població total Nt no siga exactament constant. Però també es pot simplificar en el cas que la infecció siga causada per una agent extern a la població (e.g. un mosquit) i que no siga contagiosa. En tal cas, la població infectada no influeix en la velocitat de creixement de població que encara no ha emmalaltit d(sa)/dt i, per tant, tampoc en el primer terme de l'equació el balanç entre els que s'infecten menys els que es recuperen, de manera que el model queda simplement:

-d(sa)/dt= ks*sa
d(in)/dt=ks*sa-ki*in

d(rec)/dt=ki*in

Aquest conjunt d'equacions és el mateix que el de la desintegració radioactiva A→B→C (vegeu secció 10.10 del llibre de l'assignatura que podeu trobar en format pdf a la meua web)

No m'estendré doncs en tots els detalls de la integració analítica d'aquestes equacions, atès que ve detallada a la secció 10.10 del llibre. Sols donaré una pinzellada breu:

Tenim que la integració de la primer equació és immediata donant lloc a un decaïment exponencial:

sa = sa0 * EXP(-ks*t)

La substitució d'aquest resultat en la segon equació, desprès de reorganitzar un poc l'equació i aplicar la condició inicial que en el temps t=0, el nombre ni0 d'infectats és zero, trobem que la població infectada és:

in= (ks sa0)/(ki-ks) (EXP(-ks*t)-EXP(-ki*t))

Finalment, la població que ha emmalaltit i s'ha recuperat la calculem restant a la població que ha emmalaltit (que és la diferencial entre la població total menys la que no ha emmalaltit Nt-sa) menys la població infectada o malalta:

rec = Nt - sa - in.

Considereu aquest model amb els següents paràmetres:

Població total Nt=1000 milers (1 milió)
ks=1 mes^{-1}
ki=0.5 mes^{-1}
Població sana inicial sa0 = Nt
Població infectada inicial = zero
Població recuperada inicial zero

1. Introduïu els valors del paràmetres
2. Construïu una taula les funcions sa[t], in[t], rec[t] i representeu les poblacions sanes, infectades i recuperades en funció del temps durant els 10 primers mesos de pandèmia
3. Amb ajut de Solver, calculeu el nombre de llits màxims que faran falta si tots els infectats necessiten hospitalització (valor màxim de in[t])