El tensor d'inèrcia

Escrivim:

$$L=\vec{r}\wedge\vec{p}=m\,\vec{r}\wedge\vec{v}=m\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=\vec{i}\;m\,(y\,v_z-z\,v_y)+\vec{j}\;m\,(x\,v_z-z\,v_x)+\vec{k}\;m\,(x\,v_y-y\,v_x)$$

però,

$$v=\vec{\omega}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\vec{i}\;\underbrace{(z\,\omega_y-y\,\omega_z)}_{\mathrm{v_x}}+\vec{j}\;\underbrace{(x\,\omega_z-z\,\omega_x)}_{\mathrm{v_y}}+\vec{k}\;\underbrace{(y\,\omega_x-x\,\omega_y)}_{\mathrm{v_z}}$$

Aleshores,

$$L=\vec{i}\;m\left[y\,(y\,\omega_x-x\,\omega_y)-z\,(x\,\omega_z-z\,\omega_x)\right]+\vec{j}\;\mathrm{m}\,[...]+\vec{k}\;\mathrm{m}\,[...]=$$

$$\begin{aligned}=\vec{i}\;&\left[\omega_x\left[m\,(y^2+z^2)\right]+\omega_y\left[-mxy\right]+\omega_z\left[-mxz\right]\right]+\\ \vec{j}\;&\left[\omega_x\left[-mxy\right]+\omega_y\left[m\,(x^2+z^2)\right]+\omega_z\left[-myz\right]\right]+\\ \vec{k}&\left[\omega_x\left[-mxz\right]+\omega_y\left[-myz\right]+\omega_z\left[m\,(x^2+y^2)\right]\right]=\end{aligned}$$

$$=m\begin{pmatrix}y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -yx & x^2+z^2 & -yz\\ -zx & -zy & x^2+y^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=I\omega$$

Si hi ha moltes partícules (totes amb la mateixa velocitat angular $\vec{\omega}$) aleshores,

$$L=\sum_i\vec{r}_i\wedge\vec{p}_i=\sum_i m_i\,\vec{r}_i\wedge\omega\wedge\vec{r}_i=\underbrace{\begin{pmatrix}\sum m_i\left(y_i^2+z_i^2\right) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i\\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i\left(x_i^2+z_i^2\right) & -\sum m_i y_i z_i\\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)\end{pmatrix}}_{I}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$