

## RESTITUCIÓN DE UN SISTEMA DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAL A PARTIR DE SU PROYECCIÓN AXONOMÉTRICA OBLICUA

*Gomis Martí, J.M.; Company Calleja P. (\*)  
Dpto. de Expresión Gráfica en la Ingeniería  
Universidad Politécnica de Valencia  
Camino de Vera S/N. E-46022, Valencia.  
Tel.: (96) 3877514 Fax: (96) 3877519*

### RESUMEN

En la presente comunicación se presenta el problema de restitución de un sistema ortogonal de coordenadas, a partir de una proyección paralela oblicua (proyección directa, en axonometría oblicua) del mismo. Para ello, en primer lugar, se obtiene el algoritmo que permite, de manera ágil, materializar la axonometría aprovechando al máximo los grados de libertad de ésta. Es decir, definiendo arbitrariamente la orientación relativa del plano de proyección respecto de los ejes axonométricos, y haciendo lo propio, también de manera arbitraria, con la dirección de proyección. A tal fin, se ha obtenido la matriz de transformación correspondiente, en la cual han quedado como parámetros abiertos los cosenos directores del plano del cuadro y de la dirección de proyección.

En segundo lugar se plantea el proceso inverso. Es decir, el de la restitución del modelo tridimensional del sistema axonométrico oblicuo, correspondiente a las proyecciones de tres segmentos iguales situados sobre los ejes y concurrentes con el origen de coordenadas.

En ambos casos, los resultados obtenidos se han aplicado a supuestos concretos, proporcionándose, al final de la comunicación, un balance de los mismos mediante tablas e ilustraciones.

### 1. INTRODUCCIÓN

El Teorema de Pohlke se ha utilizado tradicionalmente para justificar la "licitud del croquis". Tal es así porque, asumiendo los invariantes de paralelismo y proporcionalidad propios de la proyección cilíndrica, sabemos que el T. de Pohlke nos autoriza a representar la proyección directa de una axonometría oblicua sin más precauciones.

Sin embargo, no existe un procedimiento geométrico sencillo que permita determinar los parámetros que definen la proyección que se elige indirectamente al croquizar "según Pohlke" (es decir, manteniendo el paralelismo y la proporcionalidad). Esto no representa un inconveniente cuando la croquización se hace sobre papel y únicamente se pretende obtener una representación complementaria destinada a una persona entrenada en la lectura de perspectivas axonométricas. Pero, por el contrario, puede ser causa suficiente para descartar dicha croquización como método de generación de modelos tridimensionales en una

sesión de interacción gráfica sobre la pantalla bidimensional de un ordenador. Es decir, si no tenemos unívocamente formulada la relación que permita restituir las tres dimensiones implícitas en la perspectiva axonométrica, un ordenador no podrá sustituir al ojo de un experto, quien, observando y midiendo, puede conocer el objeto tridimensional representado en una perspectiva.

## 2. PROYECCIÓN CILÍNDRICA DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO

Supuestos un punto  $Q = (X_Q^E, Y_Q^E, Z_Q^E)$ , un plano  $\pi = (AX^E + BY^E + CZ^E + D = 0)$  y una dirección  $v = (v_1, v_2, v_3)$  referidos todos ellos a un sistema de ejes coordenados trirrectángulo  $X^E Y^E Z^E$ , la proyección de  $Q$  sobre  $\pi$  según la dirección  $v$  será un punto  $q = (x_q^E, y_q^E, z_q^E)$  (emplearemos letras minúsculas para referir el punto proyección, y letras mayúsculas para el punto a proyectar), resultado de intersectar la recta proyectante  $[v, Q]$  de  $Q$  con el plano  $\pi$  (p.e. Enriques, 1897) (fig.1). Es decir,  $x_q^E, y_q^E, z_q^E$ , serán las raíces del sistema de ecuaciones:

$$\frac{X^E - X_Q^E}{v_1} = \frac{Y^E - Y_Q^E}{v_2} = \frac{Z^E - Z_Q^E}{v_3} \quad (1)$$

$$AX^E + BY^E + CZ^E + D = 0$$

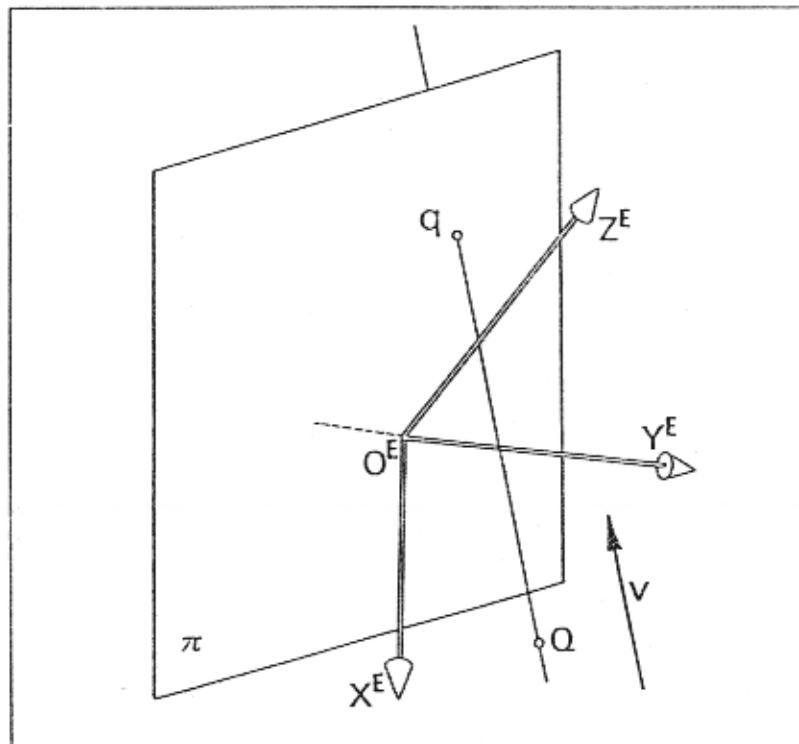


Figura 1. Proyección cilíndrica de  $Q$  sobre  $\pi$ .

Asumiendo el caso general en que  $v_1 \neq 0$ ;  $v_2 \neq 0$ , y  $v_3 \neq 0$ , el sistema (1) puede despejarse según las siguientes expresiones:

$$x_q^E = \frac{\left(\frac{Bv_2 + Cv_3}{v_1}\right)X_Q^E}{\left(A + \frac{Bv_2 + Cv_3}{v_1}\right)} - \frac{BY_Q^E}{\left(A + \frac{Bv_2 + Cv_3}{v_1}\right)} - \frac{CZ_Q^E}{\left(A + \frac{Bv_2 + Cv_3}{v_1}\right)} - \frac{D}{\left(A + \frac{Bv_2 + Cv_3}{v_1}\right)} \quad (2)$$

$$y_q^E = -\frac{AX_Q^E}{\left(B + \frac{Av_1 + Cv_3}{v_2}\right)} + \frac{\left(\frac{Av_1 + Cv_3}{v_2}\right)Y_Q^E}{\left(B + \frac{Av_1 + Cv_3}{v_2}\right)} - \frac{CZ_Q^E}{\left(B + \frac{Av_1 + Cv_3}{v_2}\right)} - \frac{D}{\left(B + \frac{Av_1 + Cv_3}{v_2}\right)} \quad (3)$$

$$z_q^E = -\frac{AX_Q^E}{\left(C + \frac{Av_1 + Bv_2}{v_3}\right)} - \frac{BY_Q^E}{\left(C + \frac{Av_1 + Bv_2}{v_3}\right)} + \frac{\left(\frac{Av_1 + Bv_2}{v_3}\right)Z_Q^E}{\left(C + \frac{Av_1 + Bv_2}{v_3}\right)} - \frac{D}{\left(C + \frac{Av_1 + Bv_2}{v_3}\right)} \quad (4)$$

Suponiendo los puntos Q y q genéricos y utilizando coordenadas homogéneas, las anteriores ecuaciones pueden expresarse a través de la siguiente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x^E \\ y^E \\ z^E \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\left(\frac{Bv_2 + Cv_3}{v_1}\right)}{\left(A + \frac{Bv_2 + Cv_3}{v_1}\right)} & -\frac{B}{\left(A + \frac{Bv_2 + Cv_3}{v_1}\right)} & -\frac{C}{\left(A + \frac{Bv_2 + Cv_3}{v_1}\right)} & -\frac{D}{\left(A + \frac{Bv_2 + Cv_3}{v_1}\right)} \\ \frac{A}{\left(B + \frac{Av_1 + Cv_3}{v_2}\right)} & \frac{\left(\frac{Av_1 + Cv_3}{v_2}\right)}{\left(B + \frac{Av_1 + Cv_3}{v_2}\right)} & -\frac{C}{\left(B + \frac{Av_1 + Cv_3}{v_2}\right)} & -\frac{D}{\left(B + \frac{Av_1 + Cv_3}{v_2}\right)} \\ \frac{A}{\left(C + \frac{Av_1 + Bv_2}{v_3}\right)} & -\frac{B}{\left(C + \frac{Av_1 + Bv_2}{v_3}\right)} & \frac{\left(\frac{Av_1 + Bv_2}{v_3}\right)}{\left(C + \frac{Av_1 + Bv_2}{v_3}\right)} & -\frac{D}{\left(C + \frac{Av_1 + Bv_2}{v_3}\right)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^E \\ Y^E \\ Z^E \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

o, de forma abreviada

$$\begin{pmatrix} x^E \\ y^E \\ z^E \\ 1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} X^E \\ Y^E \\ Z^E \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

en la que

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{41} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix} \quad (7)$$

es la matriz asociada a la proyección efectuada.

Debe notarse que los coeficientes  $f_{ij}$  son función de los cosenos directores  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ , y de los coeficientes  $A, B, C$  y  $D$  de la ecuación de  $\pi$ . Como se sabe, estos últimos describen la orientación del vector normal  $n$  de dicho plano, así como la distancia del mismo al origen de coordenadas del sistema  $X^E Y^E Z^E$ . La orientación de  $n$  viene dada por los ángulos  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ .

### 3. ECUACIONES DE LA AXONOMETRIA OBLICUA

Efectuemos, a continuación, un cambio de sistema de referencia ( $X^E Y^E Z^E$ )  $\rightarrow$  ( $X^P Y^P Z^P$ ), de manera que los ejes  $X^P$  e  $Y^P$  queden paralelos a  $\pi$  (y, por tanto,  $Z^P$  quede perpendicular a  $\pi$ ) y de manera que  $X^P$  coincida con la recta  $r$  intersección de los planos  $X^E Y^E$  y  $X^P Y^P$  (fig.2). Las coordenadas de cualquier punto ( $X^E, Y^E, Z^E$ ) referidas al nuevo sistema vendrán dadas a través de la siguiente expresión (Sellares, 1988):

$$\begin{pmatrix} X^P \\ Y^P \\ Z^P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \operatorname{sen} \delta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \delta \cos \phi_3 & \cos \delta \cos \phi_3 & \operatorname{sen} \phi_3 & 0 \\ \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \phi_3 & -\cos \delta \operatorname{sen} \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^E \\ Y^E \\ Z^E \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

en la que  $\delta$  es el ángulo que forma  $X^E$  con  $X^P$  y  $\phi_3$  es el ángulo que forma  $Z^E$  con  $Z^P$  (ángulo que forma  $Z^E$  con la normal  $n$  a  $\pi$ ). Nótese que el ángulo  $\phi_3$  es el complementario del ángulo  $\gamma$ , que forma  $Z^E$  con  $\pi$ . Es decir,  $\phi_3 = (90^\circ - \gamma)$ .

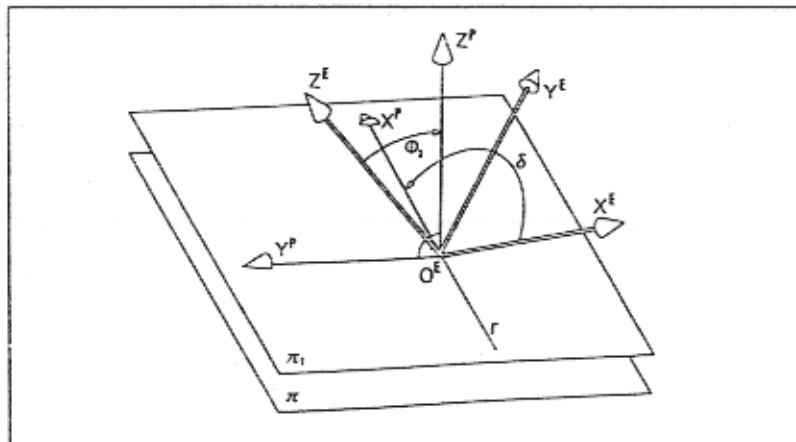


Figura 2. Sistema de coordenadas asociado a la proyección.

Por su parte,  $\delta$  puede ponerse en función de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  que forman los ejes  $X^E$ ,  $Y^E$  y  $Z^E$  con  $\pi$ , respectivamente. En la figura 3 se observa que:

$$\begin{aligned} O^E m &= O^E M \cos \alpha \\ O^E m_r &= O^E M \cos (X\hat{O}Z-90^\circ) = O^E M \cos \alpha \cos (X\hat{O}Z-90^\circ) \quad (9) \\ \cos(180^\circ-\delta) &= \cos \alpha \cos (X\hat{O}Z-90^\circ) \\ \delta &= 180^\circ - \arccos (\cos \alpha \cos (X\hat{O}Z-90^\circ)) \end{aligned}$$

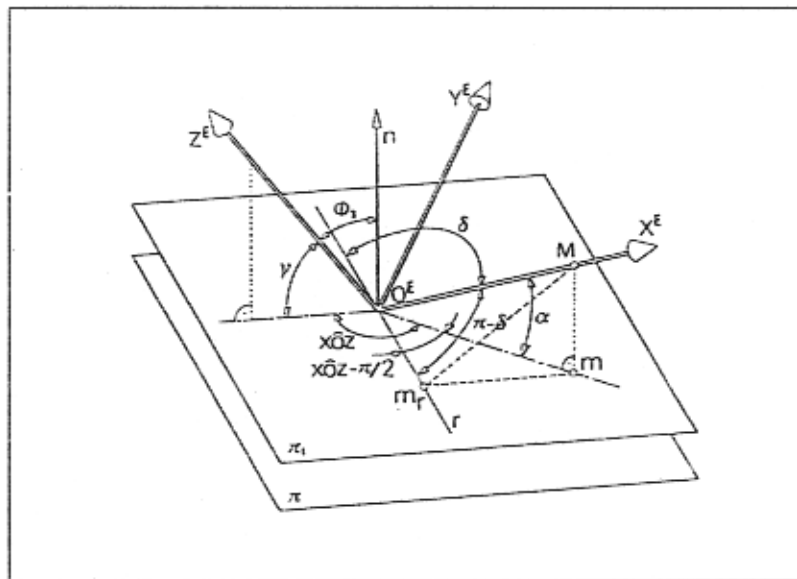


Figura 3. Relaciones angulares entre los sistemas  $X^E Y^E Z^E$  y  $X^P Y^P Z^P$ .

Donde  $X\hat{O}Z$  es el ángulo que forman las proyecciones ortogonales de los ejes  $X^E$  y  $Z^E$  sobre  $\pi$ .

Dicho ángulo puede obtenerse siempre en función de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  (Gomis,1995), aplicando el Teorema de Schlömilch-Waisbach en la axonometría que se obtiene al proyectar ortogonalmente  $X^E$ ,  $Y^E$ ,  $Z^E$  sobre  $\pi$ . Así, si IJK es el triángulo órtico de un triángulo de trazas de dicha axonometría (fig.4), se tiene que:

$$\frac{e_x^2}{JK} = \frac{e_y^2}{IK} = \frac{e_z^2}{IJ} = \frac{1}{s} \quad (10)$$

siendo

$$s = \frac{(JK + IK + IJ)}{2} \quad (11)$$

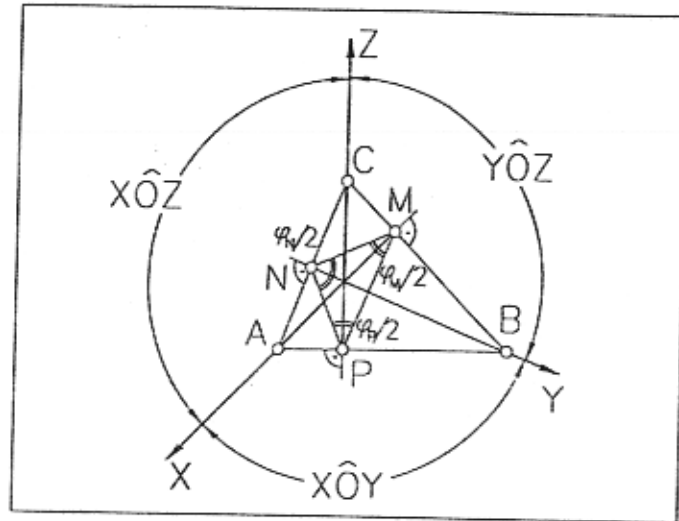


Figura 4. Proyecciones de los ejes, triángulo de trazas y triángulo órtico.

Si adoptamos  $s=1$ , los lados de un triángulo órtico de la axonometría son:

$$\begin{aligned} JK &= e_x^2 \\ IK &= e_y^2 \\ IJ &= e_z^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Si ahora denominamos  $(\varphi_I, \varphi_J, \varphi_K)$  a los ángulos del triángulo órtico, cuyos vértices son I, J y K respectivamente, las fórmulas de Briggs (Puig, 1948) permiten despejar los mencionados ángulos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \varphi_I &= 2 \arctan \sqrt{\frac{(1 - e_y^2)(1 - e_z^2)}{(1 - e_x^2)}} \\ \varphi_J &= 2 \arctan \sqrt{\frac{(1 - e_x^2)(1 - e_z^2)}{(1 - e_y^2)}} \\ \varphi_K &= 2 \arctan \sqrt{\frac{(1 - e_x^2)(1 - e_y^2)}{(1 - e_z^2)}} \end{aligned} \quad (13)$$

Luego conocemos los ángulos del triángulo órtico del de trazas, y sabemos que sus bisectrices son las proyecciones de los ejes (figura 4). En definitiva:

$$\begin{aligned} \widehat{XOY} &= \pi - \frac{\varphi_I + \varphi_J}{2} \\ \widehat{XOZ} &= \pi - \frac{\varphi_I + \varphi_K}{2} \\ \widehat{YOZ} &= \pi - \frac{\varphi_J + \varphi_K}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

Así pues si tenemos en cuenta que:

$$\begin{aligned} e_x &= \cos \alpha \\ e_y &= \cos \beta \\ e_z &= \cos \gamma \end{aligned} \tag{15}$$

$\delta$  lo podremos obtener en función de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , los cuales son los complementarios de los  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  que forman  $X^E$ ,  $Y^E$  y  $Z^E$  con  $n$ , respectivamente.

En definitiva, si escribimos abreviadamente (8) de la forma:

$$\begin{pmatrix} X^P \\ Y^P \\ Z^P \\ 1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} X^E \\ Y^E \\ Z^E \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

podemos afirmar que los coeficientes  $g_{ij}$  de  $G$  son función de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$ .

Obtengamos seguidamente las coordenadas  $(x^P, y^P, z^P)$  de la proyección de un punto cualquiera de coordenadas  $(X^E, Y^E, Z^E)$  referidas al nuevo sistema  $X^P Y^P Z^P$ . Para ello bastará sustituir (16) en (6), obteniéndose

$$\begin{pmatrix} x^P \\ y^P \\ z^P \\ 1 \end{pmatrix} = G \cdot F \begin{pmatrix} X^E \\ Y^E \\ Z^E \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

que, si hacemos

$$H = G \cdot F \tag{18}$$

puede escribirse

$$\begin{pmatrix} x^P \\ y^P \\ z^P \\ 1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} X^E \\ Y^E \\ Z^E \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Si tenemos presente que  $(x^P, y^P, z^P)$  son las coordenadas de un punto perteneciente al plano coordenado  $X^P Y^P$ , necesariamente  $z^P$  se anulará en todos los casos, con lo que  $h_{31} = h_{32} = h_{33} = h_{34} = 0$ ; y (19) la expresaremos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} x^P &= h_{11}X^E + h_{12}Y^E + h_{13}Z^E + h_{14} \\ y^P &= h_{21}X^E + h_{22}Y^E + h_{23}Z^E + h_{24} \end{aligned} \tag{20}$$

en la que los coeficientes  $h_{ij}$  son función de los ángulos  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , de los cosenos directores  $v_1, v_2, v_3$ , y de la distancia del plano  $\pi$  al origen del sistema  $X^E Y^E Z^E$ .

El sistema (20) constituye las ecuaciones de la axonometría oblicua (Paukowitsch, 1988), pudiéndose obtener a través de ellas las coordenadas  $(x^P, y^P)$ , referidas a un sistema de coordenadas bidimensional implícito al plano de proyección, de cualquier punto del espacio de coordenadas  $(X^E, Y^E, Z^E)$ , referidas al triedro de referencia  $X^E Y^E Z^E$ .

Debe notarse, finalmente, que entre los ángulos  $\phi_i$  y los cosenos directores  $v_i$  existen las siguientes relaciones:

$$\cos^2 \phi_1 + \cos^2 \phi_2 + \cos^2 \phi_3 = 1 \quad (21)$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \quad (22)$$

con lo que, si tenemos en cuenta que al tratarse de una proyección paralela, ésta no depende de la distancia del plano del cuadro  $\pi$  al origen del sistema  $X^E Y^E Z^E$ , los coeficientes  $h_{ij}$  de (20) son realmente función de 4 parámetros independientes (Gomis, 1995).

#### 4. DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES DE LA AXONOMETRÍA OBLICUA

Para la determinación de los coeficientes  $h_{ij}$  de la matriz (18), de transformación de la axonometría oblicua, podemos hacer dos hipótesis de partida:

- 1ª Que conozcamos tanto la posición relativa entre el plano del cuadro y el triedro de referencia, como la dirección de proyección.
- 2ª Que conozcamos las coordenadas  $(x_i^P, y_i^P)$  de las proyecciones del número suficiente de puntos  $(X_i^E, Y_i^E, Z_i^E)$  que nos permitan determinar la totalidad de los coeficientes  $h_{ij}$  en las ecuaciones (20),.

En cualquiera de los dos casos, obtendremos una simplificación de este problema si hacemos que el origen  $O^E$  del sistema de referencia  $X^E Y^E Z^E$  esté contenido en el plano  $\pi$ . En este supuesto, en la ecuación de  $\pi$ , será  $D = 0$ , y, en consecuencia  $f_{14} = f_{24} = f_{34} = 0$ ; y  $h_{14} = h_{24} = 0$ .

En el primer caso, si consideramos conocidos  $\phi_1, \phi_2, v_1$  y  $v_2$ ; en primer lugar obtendremos:

$$\phi_3 = \arccos \sqrt{1 - \cos^2 \phi_1 - \cos^2 \phi_2} \quad (23)$$

$$v_3 = \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2} \quad (24)$$

A continuación, en (10) sustituiremos

$$\begin{aligned} e_x &= \cos(90^\circ - \phi_1) \\ e_y &= \cos(90^\circ - \phi_2) \\ e_z &= \cos(90^\circ - \phi_3) \end{aligned} \quad (25)$$

Ahora, en (12) obtendremos JK, IK, IJ; en (13) obtendremos  $\phi_I, \phi_J, \phi_K$ ; en (14) obtendremos XÓZ; en (9) obtendremos  $\delta, \gamma$ , sustituyendo  $\phi_3$  y  $\delta$  en (8) obtendremos los coeficientes  $g_{ij}$  de la matriz G. Seguidamente, sustituyendo  $A=\cos\phi_1, B=\cos\phi_2, C=\cos\phi_3$ , y  $v_1, v_2$  y  $v_3$  en (5) obtendremos los coeficientes  $f_{ij}$  de la matriz F. Finalmente, el producto matricial G·F nos permitirá determinar los coeficientes  $h_{ij}$  buscados.

Si adoptamos la segunda hipótesis, dispondremos de un sistema de dos ecuaciones con 6 incógnitas:

$$\begin{aligned} x^P &= h_{11}x^E + h_{12}y^E + h_{13}z^E \\ y^P &= h_{21}x^E + h_{22}y^E + h_{23}z^E \end{aligned} \quad (26)$$

Precisaremos conocer pues, las coordenadas  $(x^E, y^E, z^E)$  de tres puntos M, N y Q, así como las coordenadas  $(x^P, y^P)$  de sus correspondientes imágenes sobre  $\pi$ , para determinar dichos coeficientes. En atención a nuestro propósito, situaremos M, N y Q sobre los ejes  $X^E, Y^E$  y  $Z^E$ , respectivamente, y a una misma distancia  $e$  del origen  $O^E$ . Distancia  $e$ , que no será conocida a priori, y que permitirá determinar la escala de la representación.

Debe remarcarse que, si bien en ambas hipótesis quedan determinadas completamente las ecuaciones de la axonometría oblicua (pudiéndose obtener a partir de ellas la proyección axonométrica de cualquier punto), entre ambas existe una diferencia importante. Así, mientras en el primer caso la situación relativa entre los ejes axonométricos y el plano del cuadro es conocida de forma explícita, en el segundo no. La determinación del modelo tridimensional de la axonometría oblicua conocidas las proyecciones de los puntos M, N y Q introducidos anteriormente, constituye el problema que abordamos a continuación.

##### **5. DETERMINACIÓN DEL MODELO TRIDIMENSIONAL DE UNA AXONOMETRÍA OBLICUA CONOCIDAS LAS PROYECCIONES DE TRES PUNTOS EQUIDISTANTES DEL ORIGEN Y SITUADOS SOBRE LOS EJES**

El problema planteado tiene solución, correspondiendo la primera noticia de la existencia de la misma al Teorema de Pohlke (1853), según el cual "3 segmentos de longitudes cualesquiera, origen común y dirección arbitraria no coincidentes las tres, pueden considerarse como proyecciones paralelas de tres aristas concurrentes de un cubo" (p.e. Enriques). Con posterioridad se conocen diferentes demostraciones del mencionado teorema (p.e. Schwarz, Wiener, Hohenberg, Lasala, Gil).

En este apartado vamos a reconstruir por procedimientos analíticos el modelo tridimensional de la axonometría oblicua que tiene a tres puntos, dados por sus coordenadas respecto al sistema implícito del plano del cuadro, como proyecciones cilíndricas sobre dicho plano de tres puntos situados sobre los ejes axonométricos y equidistantes una distancia  $e$  del origen de coordenadas, el cual está situado sobre el plano del cuadro coincidentemente con el origen de coordenadas del sistema implícito del mismo.

Sean, por tanto,  $m(x_m^P, y_m^P)$ ,  $n(x_n^P, y_n^P)$  y  $q(x_q^P, y_q^P)$ , las proyecciones de los puntos  $M(e, 0, 0)$ ,  $N(0, e, 0)$  y  $Q(0, 0, e)$ . Sustituyendo las coordenadas de dichos puntos en (26), tenemos que:

$$\begin{aligned} x_m^P &= h_{11}e & x_n^P &= h_{12}e & x_q^P &= h_{13}e \\ y_m^P &= h_{21}e & y_n^P &= h_{22}e & y_q^P &= h_{23}e \end{aligned} \quad (27)$$

con lo que las ecuaciones (26) de la axonometría quedan del siguiente modo:

$$\begin{aligned} x^P e &= x_m^P X^E + x_n^P Y^E + x_q^P Z^E \\ y^P e &= y_m^P X^E + y_n^P Y^E + y_q^P Z^E \end{aligned} \quad (28)$$

Por otra parte, la ecuación de la recta  $r_1$  (fig.5) que determinan los puntos  $M$  y  $m$ , referida al sistema  $X^E Y^E Z^E$  es la que resulta de sustituir en (28)  $(x^P, y^P)$  por  $(x_m^P, y_m^P)$ . Es decir:

$$\begin{aligned} x_m^P X^E + x_n^P Y^E + x_q^P Z^E - x_m^P e &= 0 \\ y_m^P X^E + y_n^P Y^E + y_q^P Z^E - y_m^P e &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

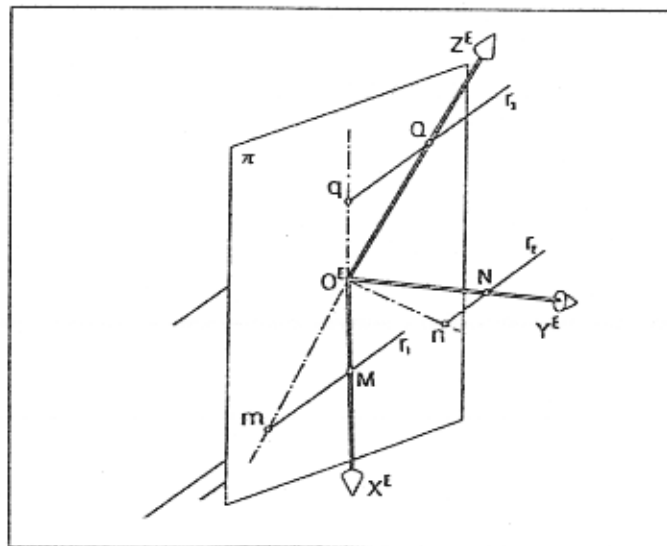


Figura 5. Rectas proyectantes de M, N y Q.

Mientras que las coordenadas del punto de intersección de  $r_1$  con  $\pi$  (es decir el punto m), referidas al sistema  $X^E Y^E Z^E$  serán las raíces del sistema:

$$\begin{aligned}x_m^p X^E + x_n^p Y^E + x_q^p Z^E - x_m^p e &= 0 \\y_m^p X^E + y_n^p Y^E + y_q^p Z^E - y_m^p e &= 0 \\AX^E + BY^E + CZ^E &= 0\end{aligned}\quad (30)$$

Dicho sistema permite obtener  $(X_m^E, Y_m^E, Z_m^E)$  en función de e, A, B y C siendo, A, B y C los cosenos directores de la normal  $n$  al plano del cuadro.

Análogamente mediante el sistema:

$$\begin{aligned}x_m^p X^E + x_n^p Y^E + x_q^p Z^E - x_n^p e &= 0 \\y_m^p X^E + y_n^p Y^E + y_q^p Z^E - y_n^p e &= 0 \\AX^E + BY^E + CZ^E &= 0\end{aligned}\quad (31)$$

se pueden obtener  $(X_n^E, Y_n^E, Z_n^E)$  en función de e, A, B y C; y mediante el sistema:

$$\begin{aligned}x_m^p X^E + x_n^p Y^E + x_q^p Z^E - x_q^p e &= 0 \\y_m^p X^E + y_n^p Y^E + y_q^p Z^E - y_q^p e &= 0 \\AX^E + BY^E + CZ^E &= 0\end{aligned}\quad (32)$$

se pueden obtener  $(X_q^E, Y_q^E, Z_q^E)$  en función de e, A, B y C.

Por otra parte, los cuadrados de las distancias de los puntos m, n y q al origen  $O^E$ , en el sistema implícito de  $\pi$  valdrán:

$$Om^2 = x_m^{p2} + y_m^{p2} : On^2 = x_n^{p2} + y_n^{p2} : Oq^2 = x_q^{p2} + y_q^{p2}\quad (33)$$

y en el sistema  $X^E Y^E Z^E$ , valdrán:

$$Om^2 = X_m^{E2} + Y_m^{E2} + Z_m^{E2} : On^2 = X_n^{E2} + Y_n^{E2} + Z_n^{E2} : Oq^2 = X_q^{E2} + Y_q^{E2} + Z_q^{E2}\quad (34)$$

De donde resulta que:

$$\begin{aligned}x_m^{p2} + y_m^{p2} &= X_m^{E2} + Y_m^{E2} + Z_m^{E2} \\x_n^{p2} + y_n^{p2} &= X_n^{E2} + Y_n^{E2} + Z_n^{E2} \\x_q^{p2} + y_q^{p2} &= X_q^{E2} + Y_q^{E2} + Z_q^{E2}\end{aligned}\quad (35)$$

que es un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas: A, B, C y e, que junto con la ecuación:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1\quad (36)$$

permiten obtener las raíces de dichas incógnitas, que nos proporcionan la orientación de la normal  $n(A, B, C)$  a  $\pi$ , así como la escala  $e$  de la representación.

Una vez obtenidos los valores de  $A, B, C$  y  $e$ , si los sustituimos en las ecuaciones (30), (31) y (32) obtenemos las coordenadas  $(X_m^E, Y_m^E, Z_m^E)$ ,  $(X_n^E, Y_n^E, Z_n^E)$ ,  $(X_q^E, Y_q^E, Z_q^E)$  de  $m, n$  y  $q$ . La dirección de proyección  $v$  es la de las rectas  $mM, nN$  y  $qQ$ , por lo que los cosenos directores de la misma los podremos obtener, indistintamente, a partir de:

$$v = \left( \frac{X_m^E - e}{\sqrt{(X_m^E - e)^2 + Y_m^E{}^2 + Z_m^E{}^2}} \quad \frac{Y_m^E}{\sqrt{(X_m^E - e)^2 + Y_m^E{}^2 + Z_m^E{}^2}} \quad \frac{Z_m^E}{\sqrt{(X_m^E - e)^2 + Y_m^E{}^2 + Z_m^E{}^2}} \right) \quad (37)$$

$$v = \left( \frac{X_n^E}{\sqrt{X_n^E{}^2 + (Y_n^E - e)^2 + Z_n^E{}^2}} \quad \frac{Y_n^E - e}{\sqrt{X_n^E{}^2 + (Y_n^E - e)^2 + Z_n^E{}^2}} \quad \frac{Z_n^E}{\sqrt{X_n^E{}^2 + (Y_n^E - e)^2 + Z_n^E{}^2}} \right) \quad (38)$$

$$v = \left( \frac{X_q^E}{\sqrt{X_q^E{}^2 + Y_q^E{}^2 + (Z_q^E - e)^2}} \quad \frac{Y_q^E}{\sqrt{X_q^E{}^2 + Y_q^E{}^2 + (Z_q^E - e)^2}} \quad \frac{Z_q^E - e}{\sqrt{X_q^E{}^2 + Y_q^E{}^2 + (Z_q^E - e)^2}} \right) \quad (39)$$

## 6. RESULTADOS

La formulación desarrollada arriba, ha sido implementada como parte de un preprocesador para el sistema de diseño DISSENY (Martí, 1985). Es importante resaltar que las ecuaciones (35), una vez sustituidas las raíces  $(X_m^E, Y_m^E, Z_m^E)$ ,  $(X_n^E, Y_n^E, Z_n^E)$  y  $(X_q^E, Y_q^E, Z_q^E)$ , obtenidas en (30), (31) y (32), dan lugar a un sistema no lineal. Motivo por el cual para su implementación se ha recurrido a un método numérico.

En este trabajo se ha utilizado el método de Newton-Raphson (Press, 1989). También debe indicarse que, dada la complejidad de las ecuaciones resultantes al sustituir (30), (31) y (32) en (35), éstas se han despejado utilizando la programación simbólica del Mathematica (Wolfram, 1988).

En las tablas 1 y 2 se muestran las coordenadas de las proyecciones de los puntos  $M, N$  y  $Q$ , obtenidas utilizando la expresión (19).

La tabla 1 corresponde a proyecciones ortogonales, habiéndose fijado la posición de  $\pi$  respecto de los ejes a través de  $e_x$  y  $e_y$ .

La tabla 3 corresponde a proyecciones oblicuas; la posición de  $\pi$  respecto de los ejes se ha fijado mediante  $A$  y  $C$ , y la dirección de proyección mediante  $v_1$  y  $v_2$ .

**Tabla 1- Axonometrías ortogonales: Problema directo**

	$c_x$	$c_y$	$c_z$	$A=v_1$	$B=v_2$	$C=v_3$	M(E,0,0)		N(0,E,0)		Q(0,0,E)	
							$x_m^p$	$y_m^p$	$x_n^p$	$y_n^p$	$x_q^p$	$y_q^p$
Iso. E=1	0.816	0.816	0.817489	0.578052	0.578052	0.575944	-0.707107	-0.407254	0.707107	-0.407254	0.	0.817489
Dim. E=1	0.471	0.942	0.943819	0.882133	0.335613	0.330462	-0.35559	-0.308863	0.934642	-0.117509	0.	0.943819
Dim. E=2	0.904	0.603	0.905083	0.427532	0.797741	0.425235	-1.762802	-0.401736	0.944736	-0.749606	0.	1.810166
Trim. E=1	0.872	0.498	0.995797	0.489506	0.867177	0.091586	-0.87088	-0.045024	0.491572	-0.07973	0.	0.995797
Trim. E=3	0.985	0.493	0.886976	0.172554	0.870029	0.461816	-2.942682	-0.269528	0.583629	-1.358979	0.	2.660928

**Tabla 2- Axonometrías oblicuas: Problema directo**

	A	C	$v_1$	$v_2$	B	$v_3$	M(E,0,0)		N(0,E,0)		Q(0,0,E)	
							$x_m^p$	$y_m^p$	$x_n^p$	$y_n^p$	$x_q^p$	$y_q^p$
E=1	0.00001	0.00001	0.5	0.5	1.0	0.707107	-0.999999	-0.000014	0.999976	-1.41418	0.000009	0.999986
E=1	0.3	0.2	0.5	0.5	0.932738	0.707107	-0.824142	-0.285707	0.700624	-0.888301	0.085219	0.830149
E=2	0.5	0.6	0.95	0.2	0.6245	0.239792	-0.732244	-0.402998	2.28542	-0.503344	0.999806	2.0164
E=3	0.5	0.6	0.75	0.3	0.6245	0.589391	-1.690212	-1.206597	2.688927	-1.502346	0.781995	2.302003
E=4	0.3	0.2	0.5	0.5	0.932738	0.707107	-3.296568	-1.142828	2.811449	-3.553204	0.340886	3.320596

Las tablas 3 y 4 muestran los valores de A, B, C y e obtenidos resolviendo el sistema formado por las expresiones (35) y (36), para las coordenadas  $(x_m^p, y_m^p)$ ,  $(x_n^p, y_n^p)$  y  $(x_q^p, y_q^p)$ , obtenidas como resultados de los ejemplos de las tablas 1 y 2.

**Tabla 3- Axonometrías ortogonales: Problema inverso**

	M(E,0,0)		N(0,E,0)		Q(0,0,E)		A	B	C	e
	$x_m^p$	$y_m^p$	$x_n^p$	$y_n^p$	$x_q^p$	$y_q^p$				
Iso. E=1	-0.707107	-0.407254	0.707107	-0.407254	0.	0.817489	0.578648	0.577454	0.575943	0.999999
Dim. E=1	-0.35559	-0.308863	0.934642	-0.117509	0.	0.943819	0.881864	0.336558	0.330216	0.999999
Dim. E=2	-1.762802	-0.401736	0.944736	-0.749606	0.	1.810166	0.428002	0.798039	0.424201	1.999999
Trim. E=1	-0.87088	-0.045024	0.491572	-0.07973	0.	0.995797	0.490087	0.866844	0.091619	0.999999
Trim. E=3	-2.942682	-0.269528	0.583629	-1.358979	0.	2.660928	0.172881	0.870536	0.460961	2.999999

Tabla 4- Axonometrías oblicuas: Problema inverso.

	M(E,0,0)		N(0,E,0)		Q(0,0,E)		A	B	C	e
	$x_m^p$	$y_m^p$	$x_n^p$	$y_n^p$	$x_q^p$	$y_q^p$				
E=1	-0.999999	-0.000014	0.999976	-1.41418	0.000009	0.999986	0.000010	0.999999	0.000009	1.008000
E=1	-0.824142	-0.285707	0.703624	-0.888301	0.085219	0.830149	0.449999	0.703561	0.550000	0.999999
E=2	-0.732244	-0.402998	2.28542	-0.503344	0.999806	2.0164	0.499999	0.624498	0.600001	1.999996
E=3	-1.690212	-1.206597	2.688927	-1.502346	0.781996	2.302083	0.498003	0.624238	0.601928	2.998181
E=4	-3.295568	-1.142828	2.811449	-3.553204	0.340886	3.320596	0.299999	0.932738	1.999999	3.999999

Las desviaciones entre los valores A, B, C y e obtenidos en los ejemplos de las tablas 3 y 4 y los de esos mismos parámetros introducidos como datos en las tablas 1 y 2, son inferiores al 0.4% en todos los casos, siendo la desviación media inferior al 0.02%.

Por lo que respecta a la interacción y la visualización gráfica de la restitución de los ejes proyectados, se han utilizado las librerías gráficas del sistema DISSENY (Company, 1994) para obtener representaciones como la que se presenta en la figura 6. En dicha figura se muestra como, conocidas las proyecciones m, n y q, contenidas en  $\pi$ , de los puntos M(e,0,0), N(0,e,0) y Q(0,0,e), se ha reconstruido el modelo tridimensional de la axonometría oblicua que justifica dichas proyecciones, visualizándose, también los ejes, sus proyecciones y la dirección de proyección. La ventana de diálogo adjunta muestra los valores exactos del vector n, normal a  $\pi$ , y de la dirección de proyección v.

## 7. CONCLUSIÓN

Se ha obtenido, y, posteriormente implementado, la transformación geométrica que permite la consecución de la axonometría oblicua, habiéndose logrado esto de manera que la visualización correspondiente permita ser gestionada por el usuario haciendo uso explícito de los cuatro grados de libertad de que goza dicho sistema de representación.

Por otra parte, partiendo del Teorema de Pohlke, se ha logrado por medios computacionales y previa la formulación analítica correspondiente, la restitución en tres dimensiones del sistema de ejes coordenados de una axonometría oblicua, conocidas las proyecciones de sus ejes y la de tres segmentos iguales tomados sobre cada uno de dichos ejes a partir de su origen. Dicha restitución constituye el paso previo y objetivo inicial, por tanto, de otro trabajo más amplio orientado hacia la restitución tridimensional en el que los autores de esta comunicación se encuentran trabajando en la actualidad.



- LASALA J. y MARCOS DE LANUZA F. *Curso de geometría descriptiva*. Ed. S.A.E.T.A., Madrid, 1960.
- [8] MARTI P., COMPANY P. Disseny. Un sistema interactivo para el diseño de estructuras basado en técnicas de optimización. *Anales de Ingeniería Mecánica*. Año 3, nº1, p 285-290, 1985
- [9] PAUKOWITSCH P. Fundamental Ideas for Computer-Supported Descriptive Geometry. *Computer & Graphics*, Vol. 12, nº 1, pp 3-14. 1988.
- [10] PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A. y VETTERLING W.T. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1989.
- [11] PUIG ADAM P. *Curso de geometría métrica*. Ed. Euler, decimotercera edición, Madrid, 1986.
- [12] SELLARES J.A. *Fundamentos de los Gráficos con Ordenador*. Ed. Edunsa, Barcelona. 1988.
- [13] WIENER C. *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*. Leipzig, 1884.
- [14] WOLFRAM S. *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*. Ed. Addison-Wesley, California, 1988.

#### **NOTA**

- (\*) Dpto. de Tecnología  
Universitat Jaume I.  
E-12071, CASTELLON, SPAIN  
Tel (964) 345680, Fax (964) 345646. E-mail pcompany@tec.uji.es