

Capítol 1

Creences i consistència

L'objectiu d'aquest primer capítol és presentar de manera intuïtiva els dos temes centrals d'aquestes notes: la consistència de creences i la validesa d'un argument. En aquest sentit, tot el que s'explica en aquest capítol s'ha de veure com una introducció informal als problemes que es tractaran als capítols posteriors.

1.1 Conjunts consistents de creences

El concepte bàsic que s'entrecavalca en aquest llibre és el de consistència de creences, que tot seguit introduïm.

Definició 1.1.1. Direm que un conjunt de creences és *consistent* quan totes poden ser vertaderes al mateix temps en qualque situació possible.

És a dir, perquè un conjunt de creences sigui consistent ha d'existir com a mínim una situació en què totes siguin vertaderes.

Exemple 1.1.2. Les afirmacions

Avui plou a Palma
Ahir va nevar a Alcúdia
Avui fa vent a Ciutadella o hi plou

formen un conjunt consistent, perquè poden ser totes vertaderes en una mateixa situació.

1.2 Arguments

Com ja hem dit, un dels objectius bàsics de la lògica, més enllà de determinar la consistència dels conjunts de creences, és estudiar els mecanismes d'expansió dels conjunts consistents. El mètode natural per ampliar un conjunt consistent de creences és servir-se del que anomenarem genèricament *arguments*.

Definició 1.2.1. Un *argument* és un conjunt de creences, anomenades les *premisses*, més una nova creença que anomenam la *conclusió*.

Definició 1.2.2. Un argument és *vàlid* quan no és possible que, en qualque situació, totes les premisses siguin vertaderes i la conclusió sigui falsa.

Proposició 1.2.3. *Un argument no és vàlid quan i només quan el conjunt de creences format per les premisses i la negació de la conclusió és consistent.*

Demostració. Un argument no és vàlid quan existeix qualque situació en la qual les premisses són totes vertaderes però la conclusió és falsa. Podem tornar a formular aquest caracterització dient que un argument no és vàlid quan existeix qualque situació en la qual les premisses i la negació de la conclusió són vertaderes. \square

Corol·lari 1.2.4. *Qualsevol argument la conclusió del qual sigui una creença que sempre sigui vertadera, és vàlid. Dit en termes de conseqüència lògica, una creença que sempre sigui vertadera és conseqüència lògica de qualsevol conjunt de creences.*

Corol·lari 1.2.5. *Qualsevol argument amb un conjunt inconsistent de premisses és vàlid. És a dir, tota creença és conseqüència lògica d'un conjunt inconsistent de creences.*

Demostració. Obvi. \square

Exercicis

1.1. Digau si els conjunts de creences següents són consistents.

- (a) En Joan o en Miquel viuen a Felanitx. En Joan no viu a Felanitx.
- (b) En Joan o en Miquel viuen a Felanitx. En Joan i en Miquel viuen a Felanitx.
- (c) En Joan i en Miquel viuen a Felanitx. Si en Joan viu a Felanitx, aleshores en Miquel no viu a Felanitx.
- (d) En Joan o en Miquel viuen a Felanitx. Si en Joan viu a Felanitx, aleshores en Miquel no viu a Felanitx.

1.2. Donau una creença tal que el conjunt de creences format per aquesta creença tota sola sigui consistent. Així mateix, donau una creença tal que el conjunt de creences format per aquesta creença tota sola sigui inconsistent.

1.3. Digau quins dels arguments següents són vàlids, i d'entre aquests darrers, quins són sòlids.

- (a) Avui plou. Per consegüent: Em dic Joan.
- (b) Avui plou. Per consegüent: Avui plou.
- (c) Vindré a sopar o a prendre una copa. No vindré a sopar. No vindré a prendre una copa. Per consegüent: Vindré a prendre una copa.

Capítol 2

La representació de les creences

En aquest capítol recorrem el camí que duu de les creences a la seva representació mitjançant qualche mena d'objectes susceptibles de ser manipulats (fins a un cert punt) amb les eines de la lògica bàsica.

2.1 Frases declaratives

Definició 2.1.1. Una *frase declarativa* és una frase (escrita), ben formada gramaticalment i que expressa directament una creença.

Nota 2.1.2. No ens entretindrem més en aquest tema, perquè entenem que tothom té clar el que és una frase declarativa (o alternativament, una oració que no és interrogativa ni imperativa).

2.2 Proposicions

De la discussió portada a terme a les seccions anteriors n'hauríem d'haver tret la conclusió que les frases declaratives, com a simples seqüències de paraules i signes de puntuació, no serveixen per representar les creences amb la finesa adient perquè, tot manipulant-les, puguem deduir coses relacionades amb la veritat o falsedat de les creences que representen. Les mancances de les frases declaratives es donen, per un costat, perq

Definició 2.2.1. Una *proposició* és una frase declarativa que té un únic significat possible, per al qual disposam de qualche criteri extern que ens diu si és vertader o fals (però no totes dues coses simultàniament).

Exemple 2.2.2. “Avui plou” és una proposició.

Definició 2.2.3. Un conjunt de proposicions és *consistent* quan existeix alguna situació en què totes aquestes proposicions són vertaderes (per un mateix criteri admissible).

Exercicis

2.1. Digau quines de les construccions següents són frases declaratives.

- (a) Les plantes verdes.
- (b) Dos per dos fan quatre.
- (c) Contestau aquesta pregunta, per favor.
- (d) Estic trist com un taronger ensagnat en vasta ombra.

2.2. Suposau que en Miquel ha dit “Avui plou”.

- (i) El que ha dit en Miquel és una frase declarativa?
- (ii) “El que ha dit en Miquel” és una frase declarativa?
- (iii) “El que ha dit en Miquel és cert” és una frase declarativa?
- (iv) “El que ha dit en Miquel és una frase declarativa?” és una frase declarativa?
- (v) “Suposau que en Miquel ha dit ‘Avui plou’” és una frase declarativa?

Capítol 3

L'anàlisi funcional

Dedicam aquest capítol exclusivament a aquest càlcul dels valors de veritat de formes proposicionals. Aquesta serà l'eina definitiva que, juntament amb la simbolització, ens permetrà, al proper capítol, automatitzar l'estudi de la consistència de conjunts de proposicions i de la validesa d'arguments.

3.1 Taules de veritat de les formes proposicionals

Una de les maneres usuals que tenim en matemàtiques de presentar les funcions és per mitjà de taules.

Exemple 3.1.1. La taula de veritat de la forma proposicional $p \rightarrow ((\neg q) \rightarrow r)$ és

p	q	r	$(\neg q)$	$((\neg q) \rightarrow r)$	$p \rightarrow ((\neg q) \rightarrow r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Definició 3.1.2. Una forma proposicional és una *tautologia* quan el seu valor de veritat funcional en qualsevol situació és 1. És a dir, quan a la seva taula de veritat la seva columna és formada tota d'uns.

Exemple 3.1.3. Les formes proposicionals següents són tautologies:

- $p \rightarrow p$
- $p \leftrightarrow p$

- $p \vee (\neg p)$

Proposició 3.1.4. *Si aplicam una tautologia a unes proposicions donades, obtenim sempre una proposició vertadera, independentment del valor de veritat de les proposicions a les quals l'aplicam. Recíprocament, una forma proposicional tal que sempre que l'aplicam a proposicions dóna una proposició vertadera, és una tautologia.*

Demostració. En efecte, ja hem vist que si aplicam una tautologia a unes proposicions obtenim una proposició vertadera. Recíprocament, si una forma proposicional no és una tautologia, aleshores en qualque situació funcional tindrà valor de veritat funcional 0, i aleshores, si aplicam aquesta forma proposicional a unes proposicions amb valors de veritat els corresponents a aquesta situació funcional, obtindrem una proposició composta falsa. Per tant, si tenim una forma proposicional tal que sempre que l'apliquem obtinguem una proposició vertadera, podem afirmar que és una tautologia (perquè si no és una tautologia, de vegades dóna una proposició falsa, com acabam de veure). \square

Les tautologies tene la propietat fonamental següent.

Teorema 3.1.5. *Si en una tautologia substituïm totes les aparicions d'una variable proposicional per una mateixa forma proposicional qualsevol, obtenim una tautologia.*

Demostració. Sigui A una tautologia amb variables proposicionals p_1, \dots, p_n , i suposem que substituïm p_1 per la forma proposicional A_1 , de manera que obtenim (per la propietat 3.1) una nova forma proposicional B (possiblement amb noves variables proposicionals). Si ara aplicam aquesta nova forma B a unes proposicions, el resultat serà el mateix que si primer aplicam la forma A_1 a aquestes proposicions i després hi aplicam A substituint per p_1 la proposició així obtinguda, i per p_2, \dots, p_n les que les pertorquin d'entrada. Però aleshores, com que sempre que aplicam A obtenim una proposició vertadera, perquè A és una tautologia, resulta que en aquest cas també obtenim una proposició vertadera. És a dir, que si aplicam B a qualssevol proposicions, el resultat és una proposició que sempre és vertadera, independentment dels valors de veritat de les proposicions a les quals l'hem aplicat. Això ens diu que B és una tautologia. \square

Exercicis

3.1. Suposau que en Miquel ha anat al teatre, que s'ha menjat un entrepà i que no ha vist na Joana (és a dir, que les proposicions “En Miquel ha anat al teatre” i “En Miquel s'ha menjat un entrepà” són vertaderes, i la proposició “En Miquel ha vist na Joana” és falsa).

Digau si, en aquesta situació, les següents proposicions són vertaderes o falses.

- (i) Si en Miquel ha anat al teatre, aleshores ha vist na Joana i ha anat al teatre.
- (ii) Si en Miquel ha anat al teatre, aleshores ha vist na Joana o ha anat al teatre.
- (iii) Si en Miquel no ha anat al teatre, aleshores ha vist na Joana o no l'ha vista.

3.2. Digau si les formes proposicionals següents són tautologie o no.

- (a) $p \rightarrow (\neg p)$
- (b) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
- (c) $(p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$
- (d) $(p \rightarrow q) \wedge ((q \rightarrow r) \wedge (\neg(p \rightarrow r)))$