Tema 6

Inferencia estadística

- 6.1 Introducción
- 6.2 Estimación
- 6.3 Contrastes de hipótesis
- 6.4 Diseño de expermientos

6.1. Introducción

La inferencia estadística trata los métodos mediante los cuales podemos hacer inferencias (extraer determinadas conclusiones o generalizaciones) sobre una población, a partir de la información extraída de una muestra aleatoria de dicha población.

La inferencia estadística podría dividirse en dos áreas: la estimación y los contrastes de hipótesis. Veamos algunos ejemplos sencillos (en la introducción 1.1. del tema 1 también se mostraron otros ejemplos; en la última práctica del Statgraphics también veremos más):

Ejemplo 6.1.: Además de las especificaciones de peso y perímetro, la FIFA ha estipulado que los balones deben botar 0.5 m de altura cuando se dejan caer a cierta altura. Una empresa juguetera desea estudiar la altura del bote de los balones producidos, para comprobar que la transición diseño a producción en masa se ha llevado a cabo con éxito (diseñar un buen producto y construir prototipos que funcionen es una cosa, otra cosa es la transferencia del diseño a la manufactura). Podríamos obtener una muestra aleatoria de por ejemplo tamaño 60. La media de dicha muestra puede emplearse para estimar la media de la población entera (todos los balones), sin embargo debe quedar claro que NO es la media verdadera de la población. Emplearemos la distribución de muestreo de $\overline{X}$ para tener una idea de la exactitud de la estimación. (**PROBLEMA DE ESTIMACIÓN**).

Ejemplo 6.2.: Obviamente, el objetivo de cualquier empresa es *hacer dinero*. Es crucial, por tanto, proporcionar a los clientes el producto adecuado en el momento adecuado. Con lo cual, se hace necesario entender por adelantado lo que los clientes buscan (y *están deseosos de pagar* por ello). Con la estadística pueden desarrollarse estudios válidos sobre las necesidades de los clientes (en Diseño conceptual: obtención de información conocida a nivel personal). Imaginemos que desea conocerse la aceptación que tendría un nuevo producto entre los jóvenes (población a la que va dirigido el producto). Deseamos conocer qué proporción estaría dispuesto a comprarlo (estaría a favor del nuevo producto). Para conseguir una estimación de la mencionada proporción se considera la opinión de 400 jóvenes obtenida mediante muestreo aleatorio simple. La estimación podría ser el cociente del número de entrevistados a favor entre el total (400). De nuevo, la distribución de muestreo de ese estimador nos proporcionará una idea de la "fiabilidad" de la estimación. (**PROBLEMA DE ESTIMACIÓN**). La estadística también puede ayudarnos a asegurar que el producto cumpla con lo que el cliente quiere, siendo un criterio fundamental la fiabilidad, o sea, el funcionamiento del producto durante el tiempo que esté en las manos del cliente. Por ejemplo, para una lavadora esto podría significar la propuesta de un plan de pruebas de *vida acelerada* que suministre una identificación temprana y eliminación de fallos, y así poder decir tras un período de digamos 3 meses y con un alto nivel de confianza que menos del 5 % de los productos sufrirán graves fallos durante los primeros diez años de vida (funcionamiento). Además, prestando especial atención a un diseño robusto frente a la variabilidad del entorno de uso: las lavadoras deben funcionar correctamente para distintas cargas, en diferentes zonas (con diversas composiciones del agua), ...

Ejemplo 6.3.: Dos procesos distintos A y B fabrican plástico. Estamos intersados en conocer si las elasticidades medias de ambos procesos pueden considerarse igual o no. Se plantearía la hipótesis que ambos procesos fabrican plástico con la misma elasticidad media y tras las pruebas oportunas, dicha hipótesis podrá o no podrá ser rechazada. En este ejemplo no se pretende estimar un parámetro, sino decidir sobre una hipótesis. La teoría del muestreo también nos ayudará a determinar la exactitud de nuestra decisión. (**PROBLEMA DE CONTRASTE DE HIPÓTESIS**).

Ejemplo 6.4.: Un proveedor nos suministra una máquina. Este proveedor afirma que la proporción de piezas defectuosas que produce la máquina es 0.001. Decidimos comprobarlo, así que extraemos una muestra aleatoria de 2.000 unidades, de las cuales 15 resultan defectuosas. ¿Es aconsejable creer al proveedor o por el contrario, deberíamos recordarle que "si no quedábamos satisfechos nos devolvía el dinero"? (**PROBLEMA DE CONTRASTE DE HIPÓTESIS**).

Ejemplo 1.3.: En el ejemplo del ratón ergonómico, aparecen problemas de estimación y contraste de hipótesis. Por ejemplo, podríamos querer contrastar si la actividad muscular (o tiempo para realizar ciertas tareas o dolor sufrido) media usando un ratón ergonómico y tradicional es la misma y demostrar los beneficios del ratón ergonómico. También podría preocuparnos para el diseño, las longitudes de la mano y determinar los límites que en sentido probabilístico "cubren" los valores individuales de la población.

He aquí un par de ejemplos sobre aplicaciones de las técnicas de diseño de experimentos (aunque desgradaciadamente sobrepasan los objetivos del presente curso, con lo cual en caso de necesidad podéis *acudir a tutorías* o consultar libros sobre Diseño de experimentos):

Ejemplo 6.5.: El diseño experimental puede emplearse en el desarrollo de nuevos productos. Se quiere diseñar la bisagra de una puerta de un automóvil. La característica de interés del producto es la fuerza de cierre. El mecanismo de cierre está formado por un resorte de hojas y un cilindro. Cuando la puerta se abre, el cilindro recorre un arco que hace que el resorte se comprima. Para cerrar la puerta, el resorte debe forzarse hacia fuera, con lo que se crea una fuerza de cierre. Se considera que esta fuerza es una función de los factores siguientes:

1. Distancia recorrida por el cilindro
2. Altura del resorte desde el pivote hasta la base
3. Distancia horizontal desde el pivote hasta el resorte
4. Altura libre del resorte de refuerzo
5. Altura libre del resorte principal

Se puede construir un prototipo del mecanismo de la bisagra en el que todos los factores pueden modificarse dentro de ciertos rangos. Una vez identificados los nieveles apropiados de estos cinco factores, puede diseñarse un experimento consistente en varias combinaciones de los niveles de los factores y probar el prototipo con estas combinaciones. Con esto se genera información con respecto a los factores que tienen la mayor influencia sobre la fuerza de cierre y con el análisis de esta información puede mejorarse el diseño del cerrojo.

Ejemplo 6.6.: Experimento para la caracterización de un proceso. Se trabaja en un nuevo proceso para soldar componentes electrónicos en tarjetas de circuito impreso. En particular, se trabaja en un tipo nuevo de máquina de soldar por flujo que debe reducir el número de puntos de soldadura defectuosos. (Una máquina de soldar por flujo calienta la tarjeta de circuito impreso y luego la pone en contacto con una onda de soldadura líquida. Esta máquina hace todas las conexiones eléctricas y la mayor parte de las conexiones mecánicas de los componentes en la tarjeta de circuito impreso. Los defectos en la soldadura requieren retoques o volverse a procesar, lo que aumenta los costos y a menudo daña las tarjetas). Se determina que la máquina de soldadura por flujo tiene varias variables que pueden ser controladas:

1. Temperatura de la soldadura
2. Temperatura de calentamiento previo
3. Velocidad del transportador
4. Tipo de flujo
5. Gravedad específica del flujo
6. Profundidad de la onda de soldadura
7. Ángulo del transportador

Además de estos factores controlables, existen otros que no pueden controlarse con facilidad (factores de ruido):

1. Espesor de la tarjeta de circuito impreso
2. Tipos de los componentes utilizados en la tarjeta
3. Distribución de los componentes sobre la tarjeta

4. Operador
5. Factores ambientales
6. Ritmo de producción

El interés recae en determinar qué factores afectan la presentación de defectos en las tarjetas de circuito impreso, pudiéndose diseñar un experimento para estimar la magnitud y dirección de los efectos de los factores.

Estos dos ejemplos ilustran algunas aplicaciones de los métodos de diseño de experiemntos, otras podrían ser: la evaluación de materiales y alternativas (ejemplo 1.1.), pruebas de duración, optimización de procesos, etc. En definitiva, pueden ayudar en la mejora de la calidad (veáse la última práctica del Statgraphics).

6.2. Estimación

Distinguiremos dos tipos:

a) Estimación puntual:

Se trata de estimar un parámetro poblacional mediante un número que lo aproxime. En el ejemplo 6.1. estimamos la media de la población con la media de una muestra y en ejemplo 6.2. se emplea la proporción de jóvenes favorables en la muestra para obtener una estimación de la proporción real (la de la población completa). Sin embargo, no podemos esperar que una estimación puntual coincida exactamente con el parámetro poblacional que pretende estimar, por ello en muchas ocasiones será preferible proporcionar un intervalo que contendrá al parámetro poblacional con un grado razonable de certidumbre.

b) Estimación por intervalos:

Obtendremos intervalos, en los que confiamos que se encuentre el parámetro poblacional a estimar, por ejemplo la media poblacional μ. A estos intervalos se les conoce como intervalos de confianza para el parámetro al (1 - α) $\cdot$ 100 %, donde 1 - α es el grado o nivel de confianza o también intervalos de confianza al nivel de significación α. (α estará entre 0 y 1, valores comunes son: 0.1, 0.05 y 0.01).

¿Cuál es la interpretación de un intervalo de confianza?

Supongamos que construimos un intervalo de confianza al 95 % para μ, para una serie de muestras de una población Normal, cada una de ellas formada por, por ejemplo, 20 observaciones. Cada vez tendremos una media muestral diferente (μ no varía). Entonces, el 95 % de los intervalos que construyésemos contendrá a μ. Por supuesto, en un experimento concreto sólo disponemos de una muestra (formada por los 20 datos) y esperaremos "con confianza" que nuestra muestra sea una de las del 95 % (¡cuidado!: no tiene sentido hablar de la probabilidad de que μ esté en un intervalo, ya que aunque μ es desconocida, no es una variable aleatoria, sino entraríamos en el campo de la inferencia Bayesiana). Veámoslo gráficamente:

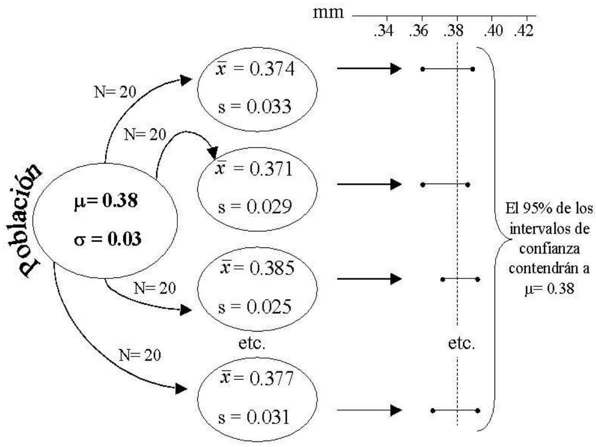

Figura 6.1: El 95 % de los intervalos de confianza contendrán a $\mu = 0.38$. El tamaño muestral considerado cada vez es 20

Si en lugar de 20, el tamaño muestral en cada muestra fuera 5, los intervalos serán más grandes, pero nuevamente el 95 % de los intervalos de confianza contendrán a $\mu = 0.38$, según la siguiente gráfica.

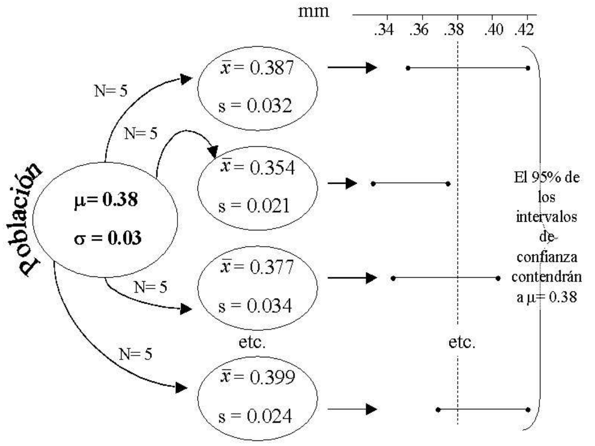

Figura 6.2: El 95 % de los intervalos de confianza contendrán a $\mu = 0.38$. El tamaño muestral considerado cada vez es 5

6.2.1. Estimación puntual

Existen diversos métodos que nos permiten calcular estimadores (estadísticos que se usan para obtener estimaciones puntuales), como son: métodos de máxima verosimilitud, de los momentos, mínimos cuadrados. Nosotros no veremos cómo conseguirlos, ni tampoco en qué propiedades (por ejemplo: si es sesgado o no, eficiencia máxima, consistencia) nos podríamos fijar para elegir un buen estimador. Veamos simplemente cómo estimar ciertos parámetros de determinadas distribuciones:

i) Estimador puntual de p, para una Binomial(n,p), n conocido:

$\hat{p} = \frac{X}{n}$ donde X es el número de éxitos que ocurren en las n observaciones.

Ejemplo 6.2.: Se realizó la encuesta a 400 jóvenes y 250 estuvieron a favor. ¿Cuál sería la estimación de p?

ii) Estimador puntual de μ, para una Normal(μ,σ^2):

$\hat{\mu} = \overline{X}$.

Ejemplo 6.1.: Hacemos el muestreo y $\overline{x} = 0.51$ m.

iii) Estimador puntual de σ^2, para una Normal(μ,σ^2):

$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}{N-1}$.

6.2.2. Estimación por intervalos

A lo largo de este apartado N denotará el tamaño muestral y α el nivel de significación.

A) Intervalo de confianza para μ, con σ^2 conocida:

[Nota (deducción de los intervalos de confianza, para el resto de casos se haría análogamente):

Sea X_1, X_2, ..., X_N una muestra aleatoria de una población con media μ desconocida y σ^2 conocida. $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ es aproximadamente N(0,1) si N es grande (por el teorema central del límite).

Por tanto, P($-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}$) = 1 - α, donde $z_{\alpha/2}$ es tal que P($Z \geq z_{\alpha/2}$) = $\alpha/2$.

Por ejemplo, para $\alpha = 0.05$, P($Z \geq 1.96$) = 0.05/2 = 0.025 y P($-1.96 \leq Z \leq 1.96$) = 0.95 $\rightarrow$

P($-1.96 \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} \leq 1.96$) = 0.95 $\rightarrow$ P($-1.96 \cdot \sigma/\sqrt{N} \leq \overline{X} - \mu \leq 1.96 \cdot \sigma/\sqrt{N}$) = 0.95 $\rightarrow$

P($-1.96 \cdot \sigma/\sqrt{N}$ - $\overline{X} \leq$ - $\mu \leq 1.96 \cdot \sigma/\sqrt{N}$- $\overline{X}$) = 0.95 $\rightarrow$ P($\overline{X} + 1.96 \cdot \sigma/\sqrt{N} \geq \mu \geq \overline{X}$ - $1.96 \cdot \sigma/\sqrt{N}$) = 0.95 $\rightarrow$ P($\overline{X}$ - $1.96 \cdot \sigma/\sqrt{N} \leq \mu \leq \overline{X} + 1.96 \cdot \sigma/\sqrt{N}$) = 0.95].

($\overline{x}$ - $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N})}$, $\overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$) con P(Z $\geq z_{\alpha/2}$) = $\alpha/2$, $Z \sim$ N(0,1)

Cuanto mayor sea 1 - α (nivel de confianza), más amplio será el intervalo.

B) Intervalo de confianza para μ, con σ^2 desconocida, para Normales:

$(\overline{x}$ - $t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N})}$, $\overline{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N}})$ con $P(T \geq t_{\alpha/2}) = \alpha/2$, T es t- Student con $N-1$ grados de libertad

Ejemplo 6.7.: Las concentraciones de zinc que se sacan del agua en 7 sitios diferentes son: 2.5, 2.4, 2.6, 2.65, 2.76, 2.8, 2.71 gramos por mililitro. Encuentra el intervalo de confianza de 95 % para la concentración media de zinc en el río.

C) Intervalo de confianza para μ, con σ^2 desconocida y N grande ($N \geq$ 30):

$(\overline{x}$ - $z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N})}$, $\overline{x}$ + $z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N}})$ con $P(Z \geq z_{\alpha/2}) = \alpha/2$, $Z \sim$ N(0,1)

Observación: *Aun cuando la normalidad no pueda suponerse, si deseamos obtener un intervalo de confianza para μ con la varianza desconocida, si la muestra es grande, podemos usar C). Si la muestra es pequeña, usaremos B) si la distribución es normal.*

Ejemplo 6.1.: Calcula un intervalo de confianza al 95 % para la altura media del bote, sabiendo que la varianza muestral es $s^2 = 0.01$.

[Nota: $z_{0,1} = 1.28$, $z_{0,05} = 1.64$, $z_{0,025} = 1.96$, $z_{0,01} = 2.33$, $z_{0,005} = 2.56$].

Para determinar el tamaño muestral necesario para una precisión determinada, en el caso de la estimación de la media μ a partir de una muestra aleatoria simple, usaremos:

$$N = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{Error}\right)^2$$

Cuando σ es desconocida, podemos recurrir a estudios previos o bien a la obtención de una muestra piloto previa, con la que estimaremos σ, mediante s.

Ejemplo 6.7.: ¿Qué tamaño de muestra necesitaríamos si queremos tener 95 % de confianza de que nuestra estimación de μ difiera menos de 0.05? Utiliza que por estudios previos podemos estimar σ por 0.3.

A veces, el interés no está en la estimación de parámetros, sino en *dónde caen las observaciones individuales*. Así pues, debemos distinguir entre intervalos de confianza e intervalos de tolerancia. Para una distribución Normal con media y varianza desconocidas, los límites de tolerancia están dados por $\overline{x} \pm ks$, donde k está determinado de modo que se pueda establecer con una confianza del 100(1 - α) por ciento que los límites contienen al menos una proporción p de la población. En Montgomery (por ejemplo), puedes encontrar las tablas que proporcionan k, con las que calcular estos intervalos de tolerancia.

D) Intervalo de confianza para la diferencia de medias μ_1 - μ_2, con σ_1^2 y σ_2^2 conocidas, para muestras aleatorias independientes (N_1 = tamaño muestral de la muestra de la población 1, N_2 = tamaño muestral de la muestra de la población 2):

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}) \text{ con } P(Z \geq z_{\alpha/2}) = \alpha/2,\ Z \sim N(0,1)$$

E) Intervalo de confianza para la diferencia de medias μ_1 - μ_2, con σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas, para muestras aleatorias independientes y tamaños muestrales grandes (N_1 = tamaño muestral de la muestra de la población 1, N_2 = tamaño muestral de la muestra de la población 2):

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}) \text{ con } P(Z \geq z_{\alpha/2}) = \alpha/2,\ Z \sim N(0,1)$$

Ejemplo 6.8.: Se lleva cabo un expermiento en que se comparan dos tipos de motores, A y B. Se mide el rendimiento en millas por galón de gasolina. Se realizan 50 experimentos con el motor A y 75 con el B. La gasolina que se utiliza y las demás condiciones se mantienen constantes. El rendimiento promedio de gasolina para el motor A es de 36 millas por galón con desviación típica 6, el promedio para el motor B es 42 millas por galón y desviación típica 8. Calcula el intervalo de confianza de 99 % sobre μ_A - μ_B, donde μ_A y μ_B son el rendimiento de gasolina medio poblacional para los motores A y B respectivamente. ¿Podemos suponer que ambas medias poblacionales son iguales?

[Para el caso de una diferencia entre dos medias, la interpretación del intervalo de confianza

puede extenderse a una compración de las dos medias. De esta manera, por ejemplo, si tenemos gran confianza de que una diferencia μ_1 - μ_2 es positiva, realmente inferiremos que $\mu_1 > \mu_2$ con poco riesgo de caer en un error. Por tanto, en la interpretación de los intervalos de confianza para diferencia de medias nos fijaremos si el cero pertenece al intervalo o no].

F) Intervalo de confianza para la diferencia de medias μ_1 - μ_2 de poblaciones normales independientes, con varianzas desconocidas pero iguales ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) (N_1 = tamaño muestral de la muestra de la población 1, N_2 = tamaño muestral de la muestra de la población 2):

$(\overline{x}_1$ - $\overline{x}_2 \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{(N_1-1)s_1^2+(N_2-1)s_2^2}{N_1+N_2-2}}\sqrt{\frac{N_1+N_2}{N_1 N_2}})$ con P$(T \geq t_{\alpha/2}) = \alpha/2$, T es t-Student con $N_1 + N_2 - 2$ grados de libertad

Ejemplo 6.9.: Se desea conocer si dos aleaciones de alumnio tienen o no igual resistencia. Para ello se midió la resistencia a la compresión de 58 especímenes del primer tipo y 27 del segundo, obteniéndose $\overline{x}_1 = 70.7$ y $\overline{x}_2 = 76.13$. Supongamos que se distribuyen normalmente. Sus varianza muestrales son: s_1^2 = 1,8^2 y s_2^2 = 2,42^2 (supongamos que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, lo comprobaremos en un apartado posterior). Calcula el intervalos de confianza de la diferencia de medias al 95 %. ¿Podemos suponer igualdad de medias poblacionales?

G) Intervalo de confianza para la diferencia de medias μ_1 - μ_2 de poblaciones normales independientes, con varianzas σ_1^2, σ_2^2 desconocidas y desiguales (N_1 = tamaño muestral de la muestra de la población 1, N_2 = tamaño muestral de la muestra de la población 2):

$(\overline{x}_1$ - $\overline{x}_2 \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}})$ con P$(T \geq t_{\alpha/2}) = \alpha/2$, T es t-student con $\frac{(\frac{s_1^2}{N_1}+\frac{s_2^2}{N_2})^2}{\frac{(s_1^2/N_1)^2}{N_1-1}+\frac{(s_2^2/N_2)^2}{N_2-1}}$ grados de libertad

Ejemplo 6.10.: Para comparar dos tipos de parachoques, seis de cada tipo se instalaron en unos automóviles. Después éstos se lanzaron contra un muro a 20km/h y se determinaron los gastos de las reparaciones (en euros).

Parachoques 1: 107, 148, 123, 165, 102, 119 $\rightarrow$ $\overline{x}_1 = 127.33$ $s_1^2 = 597.867$

Parachoques 2: 134, 115, 112, 151, 133, 129 $\rightarrow$ $\overline{x}_2 = 129$ $s_2^2 = 202$

Determina el intervalo de confianza de la diferencia de las medias al 95 % suponiendo que los gastos son normales y $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

H) Intervalo de confianza para la diferencia de medias μ_1 - μ_2 para muestras apareadas. Hay veces que las muestras no son independientes. Pueden ser apareadas como es el caso de tener datos del tipo "antes" y "después", o bien si a cada objeto (u objetos emparejados, por ejemplo cada par de zapatos al estudiar el desgaste como se ha visto en la práctica del Statgraphics) se le aplican dos métodos.

$(\overline{d} \pm t_{\alpha/2} \frac{s_d}{\sqrt{N}})$ donde $\overline{d}$ es la media de las diferencias y s_d es la desviación típica de las diferencias. Además, $P(T \geq t_{\alpha/2}) = \alpha/2$, T es t-Student con N - 1 grados de libertad, N es el número de objetos (parejas) de que disponemos

Ejemplo 6.11.: Disponemos de dos básculas y desearíamos comprobar si existe diferencia sistemática entre los pesos obtenidos con ambas básculas. Para ello construiremos el intervalo de confianza de la diferencia de medias al 95 %.

	BÁSCULA 1	BÁSCULA 2	DIFERENCIA (Báscula 1 - Báscula 2)
Roca 1	11.23	11.27	-0.04
Roca 2	14.36	14.41	-0.05
Roca 3	8.33	8.35	-0.02
Roca 4	10.50	10.52	-0.02
Roca 5	23.42	23.41	0.01
Roca 6	9.15	9.17	-0.02
Roca 7	13.47	13.52	-0.05
Roca 8	6.47	6.46	0.01
Roca 9	12.4	12.45	-0.05
Roca 10	19.38	19.35	0.03

$\downarrow$

$\overline{d}$ = -0.02

s_d = 0.02867

I) Intervalo de confianza para σ^2 en una población normal:

$(\frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}})$ con $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}) = \alpha/2$, χ^2 es chi- cuadrado con $N-1$ grados de libertad

Ejemplo 6.12.: Cinco medidas del contenido de alquitrán de cierta clase de cigarrillos dieron como resultado: 14.5, 14.2, 14.4, 14.3 y 14.6 mg. por cigarrillos. Construye un intervalo de confianza de 99 % para la desviación típica de la población muestreada (asume condiciones de normalidad).

J) Intervalo de confianza para el cociente σ_1^2/σ_2^2 de varianzas de dos poblaciones normales independientes:

$(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}}, \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}})$ donde P(F > $F_{\alpha/2}$) = $\alpha/2$ y F es F de Sndecor con $(N_1 - 1, N_2 - 1)$ grados de libertad

Ejemplo 6.9.: Construye un intervalo de confianza al 95 % para el cociente de ambas varianzas. ¿Fue apropiado suponer igualdad de varianzas?

[En la interpretación de los intervalos de confianza para cociente de varianzas nos fijaremos

si el uno pertenece al intervalo o no].

K) Intervalo de confianza para una proporción p (de una Binomial) cuando N es grande y la proporción no es cercana a cero:

$(\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{N}})$, donde P($Z > z_{\alpha/2}$) = $\alpha/2$ $Z \sim$ N(0,1) y $\hat{p}$ = X /N, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$, X = número de éxitos

Ejemplo 6.2.: Calcula un intervalo de confianza al 95 % para p.

La magnitud del error que cometemos al emplear X/N como estimador de p, viene dada por: E = Error = $z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$. Esta fórmula nos puede servir para determinar el tamaño muestral necesario para alcanzar un grado de precisión deseado.

$N = p(1-p) \cdot (\frac{z_{\alpha/2}}{E})^2$

Si no dispusiésemos de información acerca del valor de p, por ejemplo en base a una muestra piloto:

$N = p(1-p) \cdot (\frac{z_{\alpha/2}}{E})^2 \leq \frac{1}{4}\ (\frac{z_{\alpha/2}}{E})^2$

Una vez obtenidos los N datos, tendremos un $(1-\alpha)100\,\%$ de confianza que el error no excederá E.

Ejemplo 6.13.: Queremos estimar la proporción real de unidades defectuosas en un embarque muy grande de azulejos y deseamos estar al menos 95 % seguros que el error es como mucho de 0.04. ¿Cómo ha de ser de grande la muestra si:

a) no tenemos idea de cuál pueda ser la proporción real?

b) por estudios previos, sabemos que la proporción real no excede de 0.12?

L) Intervalo de confianza para una proporción p, si ésta es muy cercana a cero:

$(0,\ \frac{1}{2N}\chi^2_\alpha)$ con $P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \alpha$, χ^2 es chi- cuadrado con $2(X+1)$ grados de libertad, X = número de éxitos

Ejemplo 6.14.: Durante un mes, se usaron continuamente 2000 componentes y de ellas 4 fallaron. Calcula un intervalo de confianza al 99 % para la probabilidad de que un componente falle en las condiciones establecidas.

M) Intervalo de confianza para la diferencia de dos proporciones, con N_1 y N_2 grandes (N_1 = tamaño muestral de la muestra de la población 1, N_2 = tamaño muestral de la muestra de la población 2):

$(\hat{p_1} - \hat{p_2} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p_1}\hat{q_1}}{N_1} + \frac{\hat{p_2}\hat{q_2}}{N_2}})$, donde $P(\ Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ $Z \sim$ N(0,1), $\hat{p_1} = X_1\ /N_1$, $\hat{q_1} = 1 - \hat{p_1}$, X_1 = número de éxitos en las N_1 pruebas y $\hat{p_2} = X_2\ /N_2$, $\hat{q_2} = 1 - \hat{p_2}$, X_2 = número de éxitos en las N_2 pruebas

Ejemplo 6.15.: En un estudio para comparar dos líneas de montaje se encontró que: 16 de 200 tractores de la línea 1 necesitaron grandes ajustes antes de embarcarlos, mientras que 14 de 400 los necesitaron en la línea 2. Determina el intervalo de confianza al 95 % para la diferencia de proporciones.

[En la interpretación de los intervalos de confianza para diferencia de proporciones nos fijaremos si el cero pertenece al intervalo o no].

6.3. Contrastes de hipótesis

Hay muchos problemas (por ejemplo los ejemplos 6.3. o 6.4.) en los que más que estimar el valor de un parámetro, debemos decidir si un enunciado referente a un parámetro es cierto o falso, o sea, debemos probar una hipótesis sobre un (o más) parámetro.

Contraste de hipótesis: es un método numérico para comprobar una teoría o hipótesis sobre una población.

En todo contraste de hipótesis nos encontramos con una hipótesis nula (H_0) y una hipótesis alternativa (H_1 o H_A). Cuando la meta de un experimento sea establecer una afirmación, ésta se convertirá en la hipótesis alternativa y su negación será la hipótesis nula. La hipótesis nula se supone cierta hasta que los datos indiquen lo contrario, por tanto la que se ha de demostrar que es cierta es la hipótesis alternativa, H_1. Podríamos plantear un símil con los juicios. En principio, se parte de la hipótesis nula de que un acusado es inocente hasta que se demuestre su culpabilidad. El fiscal es el que debe demostrar la culpabilidad y no será hallado culpable a menos que la hipótesis nula de su inocencia sea claramente rechazada. Con lo cual, si es hallado no culpable, no implica que el acusado haya demostrado su inocencia, sino que sólo implica que no se ha demostrado su culpabilidad.

Ejemplo 6.16.: Una ingeniera quiere mejorar la resistencia a los golpes de un envase que se produce en una planta y diseña un nuevo envase. Con el proceso existente, la resistencia del plástico del envase se distribuye normalmente con $\mu_0 = 1250$. La ingeniera produce en el laboratorio un lote de envases con el nuevo proceso y escoge una muestra aleatoria de tamaño 25. La media de esta muestra es $\overline{x} = 1312$ y $s = 150$. Denotemos por μ la resistencia media del envase producido por el nuevo proceso, así que $\overline{x}$ es un valor estimado de μ. ¿Existe diferencia significativa entre ambos envases? Podríamos plantear el siguiente contraste:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0: & \mu \leq \mu_0 = 1250 \text{ (o simplemente } \mu = \mu_0 = 1250\text{, no hay diferencia entre ambos)} \\ \mathrm{H}_1: & \mu > \mu_0 = 1250 \end{cases}$$

Planteamos dicho contraste ya que la hipótesis que queremos demostrar es que el nuevo es mejor que el existente. Implícitamente se está suponiendo que el proceso existente es bueno y que los gastos de cambio de proceso son lo suficiente importantes como para necesitar una justificación.

Nota: Si hubiésemos partido de que el proceso existente es malo y los gastos del cambio no fueran importantes, entonces habría que demostrar que el existente es superior y plantearíamos:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0: & \mu \geq \mu_0 = 1250 \\ \mathrm{H}_1: & \mu < \mu_0 = 1250 \end{cases}$$

Aunque H_0 sea verdadera y no exista diferencia entre los procesos, para una muestra es dificilísimo que obtengamos exactamente $\overline{x} = \mu_0$, y por tanto, podemos cometer errores que serán:

Error de tipo I: se produce cuando H_0 es cierta pero se rechaza. La probabilidad de cometerlo se designa por α.

Error de tipo II: se produce cuando H_0 es falsa pero se "acepta". La probabilidad de incurrir en él se designa por β.

	"Aceptar" H_0	Rechazar H_0
H_0 cierta	Decisión correcta	Error I
H_0 falsa	Error II	Decisión correcta

Se llama **nivel de significación** α de un contraste de hipótesis a la probabilidad de cometer un error de tipo I.

Ejemplo 6.17.: Se quiere verificar si la cantidad de agua envasada en botellas de 0.5 l. es efectivamente dicha cantidad. Se toma una muestra de $N = 60$ botellas de las que se obtienen $\overline{x}$ =0.51 l. y s= 0.1.

✍ **Ejemplo 6.18.:** Se ha probado la duración de 9 baterías de cierta marca, para ordenadores portátiles. Los tiempos obtenidos son (en horas): 11.7, 12.2, 10.9, 11.4, 11.3, 12, 11.1, 10.7, 11.6. Según el fabricante de las baterías, su duración es de 12.1 horas. Se quiere saber con el 99 % de certeza si las baterías de esta marca tienen una duración μ significativamente inferior a μ_0 =12.1.

Pasos a seguir para resolver los problemas de pruebas de hipótesis:

1) Formular una hipótesis nula y alternativa apropiada − a) es un contraste bilateral mientras que b) y c) son contarstes unilaterales −:

a) $H_0 : \theta = \theta_0$; $H_1 : \theta \neq \theta_0$

b) $H_0 : \theta \geq \theta_0 \ (\theta = \theta_0)$; $H_1 : \theta < \theta_0$

c) $H_0 : \theta \leq \theta_0 \ (\theta = \theta_0)$; $H_1 : \theta > \theta_0$

Ejemplo 6.17.:

$$\begin{cases} \text{H}_0: & \mu = 0.5 \\ \text{H}_1: & \mu \neq 0.5 \end{cases}$$

✍ **Ejemplo 6.18.:**

$$\begin{cases} \text{H}_0: & \mu \\ \text{H}_1: & \mu \end{cases}$$

2) Especificar la probabilidad de error de tipo I e identificar los datos con los que contamos.

Ejemplo 6.16.:

$\mu_0 = 1250$, $s = 150$, $\overline{x} = 1312$, $N = 25$, tomararemos $\alpha = 0.05$.

Ejemplo 6.17.:

$\mu_0 = 0.5$, $s = 0.1$, $\overline{x} = 0.51$, $N = 60$, tomararemos $\alpha = 0.05$.

✍ **Ejemplo 6.18.:**

3) Elegir un estadístico de contraste adecuado, así como su distribución:

Ejemplo 6.16.:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{25}} \sim t_{25-1}$$

Ejemplo 6.17.:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{60}} \sim N(0,1)$$

✍ **Ejemplo 6.18.:**

4) Cálculo del valor observado del estadístico de contraste según los datos observados:

Ejemplo 6.16.:

$$t = \frac{1312 - 1250}{150/\sqrt{25}} = 2{,}06667$$

Ejemplo 6.17.:

$$z = \frac{0{,}51 - 0{,}5}{0{,}1/\sqrt{60}} = 0{,}7746$$

✍ **Ejemplo 6.18.:**

5) Determinación de la región crítica y el/los valor/es crítico/s:

Región crítica: son los valores del estadítico de contraste que nos conducen a rechazar la hipótesis nula.

Región de aceptación: son los valores del estadístico de contraste que nos llevan a "aceptar" = *no rechazar* la hipótesis nula.

Valor crítico: valor/es que separan la región crítica de la de aceptación.

Ejemplo 6.16.:

región crítica: (t_α, + ∞)

Como $\alpha = 0.05$ y el estadístico sigue una t de Student con 25 - 1 = 24 grados de libertad, el valor crítico es: 1.711 y la región crítica queda: (1.711, + ∞)

Ejemplo 6.17.:

región crítica: (- ∞, - $z_{\alpha/2}$) $\cup$ ($z_{\alpha/2}$, + ∞)

Como $\alpha = 0.05$ y el estadístico sigue una N(0,1), $z_{\alpha/2} = z_{0,05/2} = z_{0,025} = 1.96$ y la región crítica quedaría: (- ∞, - 1.96) $\cup$ (1.96, + ∞)

✍ **Ejemplo 6.18.:**

6) Decisión: rechazar H_0 si el valor observado pertenece a la región crítica, sino no rechazar H_0.

Ejemplo 6.16.:

2.06667 $\in$ (1.711, + ∞) $\rightarrow$ Rechazamos H_0. El proceso nuevo es mejor que el existente.

Ejemplo 6.17.:

0.77 no pertenece a (- ∞, - 1.96) $\cup$ (1.96, + ∞) $\rightarrow$ No rechazamos H_0, no tenemos pruebas para afirmar que la cantidad es distinta de 0.5l., la diferencia ($\overline{x} = 0.51$) puede atribuirse al azar.

✍ **Ejemplo 6.18.:**

A) Contraste de hipótesis para la media μ, con N grande ($N \geq 30$):

$$Z \approx \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{N}} \sim N(0,1) \qquad \begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \\ \mathrm{H}_1 \text{: 3 casos posibles} \rightarrow \end{cases}$$

H_1	Región crítica
$\mu < \mu_0$	$(-\infty, -z_\alpha)$
$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, \infty)$
$\mu > \mu_0$	(z_α, ∞)

Ejemplo 6.17.: ya visto

B) Contraste de hipótesis para la media μ en una población Normal con σ^2 desconocida:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{N}} \sim t_{N-1} \qquad \begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \\ \mathrm{H}_1 \text{: 3 casos posibles} \rightarrow \end{cases}$$

H_1	Región crítica
$\mu < \mu_0$	$(-\infty, -t_\alpha)$
$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty, -t_{\alpha/2}) \cup (t_{\alpha/2}, \infty)$
$\mu > \mu_0$	(t_α, ∞)

Ejemplo 6.16.: ya visto

Ejemplo 6.18.: ya visto

Otros casos puedes encontrarlos en fotocopias. Pero además existen muchos otros contrastes, en Johnson puedes encontrar una introducción.

Observación: *Además de calcular la región crítica puede calcularse el $p-valor$ (asociado a nuestros datos). El $p-valor$ es el menor valor de α que nos conduciría a rechazar H_0. Un $p-valor$ se determina como la probabilidad de que el estadístico de contraste pertenezca a la región crítica cuando el valor observado se considera valor crítico. Valores pequeños del $p-valor$ (por ejemplo menor que 0.05) nos llevan a rechazar H_0. Si α es menor que el $p-valor$, no rechazamos H_0. En cambio, si α es mayor que el $p-valor$, rechazamos H_0.*

Observación: *Existe una relación entre los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis. Los intervalos de confianza (bilaterales) vistos en el apartado anterior (exceptúando* *el L)) nos dan la región de aceptación de contrastes bilaterales al 100·$(1-\alpha)$ % y por tanto, H_0 no será rechazada al nivel α si θ_0 pertence al intervalo. O sea, intervalo de confianza $(1-\alpha)$ = conjunto de hipótesis aceptables a nivel α. Por ejemplo, para el caso de la media de una población Normal, se acepta al nivel α la hipótesis $\mu = \mu_0$ cuando el intervalo de confianza 1 - α construido para μ incluye a μ_0 y viceversa. Ejemplo: consideremos un proceso de fabricación que, en condiciones normales, produce elementos cuya vida se distribuye normalmente con media 5.100 horas. Se introducen ciertos cambios en el proceso que pueden afectar a la media pero no a la variabilidad. Para contrastar si estos cambios han producido efectos, tomamos una muestra de 4 elementos cuyas vidas resultan ser (en horas): 5010, 4750, 4826, 4953. ¿Hay evidencia de un efecto sobre la media?*

$\overline{x}$ = 4884.75, s = 118.258, intervalo de confianza para μ al 95 %: $(\overline{x} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N)}})$ = (4884.75 $\pm$ 3.182$\frac{118{,}258}{\sqrt{4)}}$) = (4696.6,5072.9), como 5100 $\notin$ (4696.6,5072.9) $\rightarrow$ sí que habrá afectado a la media

C) Pruebas con tablas de contingencia:

Una tabla de contingencia puede surgir en dos contextos diferentes:

a) Una muestra y dos variables cada una de ellas con r y c valores. En este caso podría interesarnos **contrastar la hipótesis de independencia de las dos variables**.

Ejemplo 2.3.: En este ejemplo del tema 2, se había efectuado un estudio sobre los fallos de unos componentes electrónicos. Existían cuatro tipos de fallos posibles y dos posiciones de montaje para el dispositivo. Los datos obtenidos fueron:

	Tipo de fallo			
Posición de montaje	A	B	C	D
1	12	36	8	5
2	5	16	6	12

Se quire probar la hipótesis (con $\alpha = 0.05$) de que el tipo de fallo es independiente de la posición de montaje.

b) r muestras independientes y una variable observada con c categorías. En este caso, podría interesarnos contrastar la hipótesis de que todas las distribuciones de donde se seleccionan las r muestras son semejantes, es decir, que **las r distribuciones son homogéneas**. Por ejemplo, cuando existen sólo dos categorías, tales como éxito y fracaso, defectuoso y no defectuoso, etc., entonces la prueba de homogeneidad es en realidad una prueba sobre la igualdad de r parámetros binomiales.

Ejemplo 6.19.: Consideremos 4 proveedores A, B, C y D; 200 componentes de cada proveedor son aleatoriamente seleccionadas para examinarlas obteniéndose los siguientes resultados:

	Proveedor			
Calidad	A	B	C	D
Defectuoso	6	4	4	16
No defectuoso	194	196	196	184

¿La proporción de defectuosos es la misma para los 4 proveedores, o sea, son homogéneas las poblaciones? (considera $\alpha = 0.01$).

Para ambos casos, el cálculo del estadístico de contraste es el mismo, aunque la forma de plantear H_0 y de enunciar las conclusiones sean distintas.

El estadístico que usaremos (que ya conocíamos) es:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}, \tag{6.1}$$

Bajo H_0, sigue aproximadamente una distribución χ^2 con $(r-1) \cdot (c-1)$ grados de libertad. La región crítica (a nivel α) es: (χ^2_α, ∞). Para que la aproximación sea correcta, todas las e_{ij} deben ser al menos 5.

Ejemplo 2.3.: Ya calculamos $\chi^2 = 9.36$.

$\chi^2_{0,05}$ = (con (2 - 1) $\cdot$ (4 -1) grados de libertad) =

Ejemplo 6.19.:

$\chi^2 = 13.71$

$\chi^2_{0,01}$ = (con (2 - 1) $\cdot$ (4 -1) grados de libertad) =

6.4. Diseño de experimentos

Un **experimento** es un conjunto de pruebas o medidas, cuyo objetivo es obtener información que permita tomar decisiones sobre el producto o proceso bajo estudio.

Los métodos de diseño experimental son útiles en las actividades de ingeniería de diseño, donde se desarrollan nuevos productos y se mejoran los existentes. Algunas aplicaciones representativas de los experimentos diseñados de manera estadística en la ingeniería de diseño incluyen (ver ejemplos 1.3., 6.5. y prácticas):

- Evaluación y comparación de configuraciones de diseño básicas
- Evaluación de materiales diferentes
- Selección de parámetros de diseño de modo que el producto funcione bien bajo una gama amplia de condiciones de campo (o para que el diseño sea robusto).
- Determinación de los parámetros de diseño importantes del producto que tienen impacto sobre el funcionamiento de éste.

El empleo de diseño experimental en el proceso de diseño puede dar como resultado productos que son más fáciles de fabricar, productos que tienen un desempeño y una fiabilidad mejores y productos que pueden diseñarse, desarrolllarse y producirse en menor tiempo.

También son útiles las técnicas de diseño experimental en la mejora del rendimiento de los procesos de manufactura, pues así se pueden determinar el subconjunto de variables del proceso que tienen mayor influencia sobre el rendimiento de éste. De esta manera, puede llegarse a:

- Mejorar el rendimiento del proceso
- Reducir la variabilidad del proceso y acercarlo a los requerimientos nominales
- Disminución del tiempo de diseño y desarrollo
- Disminución del costo de operación

Los experimentos diseñados estadísticamente permiten eficiencia y economía en el proceso experimental, y el empleo de los métodos estadísticos para el análisis de datos brinda **objetividad científica** al obtener conclusiones.

El diseño de experimentos es un campo demasiado amplio para tratarse en este curso introductorio. En los libros de la bibliografía complementaria podéis encontrar varios capítulos dedicados a este tema. Además, en Domingo existe una pequeña introducción. Lawson ("Estrategias experimentales para el mejoramiento de la calidad en la industria") también puede serviros. Nosotros sólo presentaremos el caso más sencillo de experimento. Pero antes veamos algunas definiciones:

Los **factores controlados** en un experimento son las características para las que se prueban diferentes **niveles** o valores con el fin de ver su influencia sobre los resultados. Puede tratarse de factores cuantitativos (temperatura, velocidad, etc.) o cualitativos (proveedor, tipo de disolvente, etc.). Los diversos valores de un factor se llaman niveles del factor. En caso de controlar un único factor, sus niveles también se llaman **tratamientos**.

Nosotros sólo describiremos (ver la última práctica también) el caso en que sólo se controla un factor, lo cual nos conduce a hablar de **ANOVA** (análisis de la varianza) con un solo factor.

Dadas k poblaciones normales independientes con medias μ_1, μ_2, ..., μ_k e idéntica varianza σ^2 correspondientes cada una a los individuos sometidos a un cierto tratamiento, el ANOVA es una técnica muy potente para aclarar si los tratamientos tienen influencia significativa en las observaciones, lo que equivaldría a contrastar:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k \\ \mathrm{H}_1 : \text{no todas las medias son iguales} \end{cases}$$

[Nota: deben comprobarse las condiciones de validez para ANOVA y si éstas no se verificaran emplear algún contraste no paramétrico, como el contraste de Kruskal-Wallis].

Ejemplo 6.20.: Un fabricante de papel utilizado para fabricar bolsas para caramelos, está interesado en mejorar la resistencia a la tensión del producto. Se piensa que la resistencia a la tensión es una función de la concentración de madera dura en la pulpa, y que el rango de interés práctico de las concentraciones de madera dura está entre 5 % y 20 %, por lo que se decide investigar 4 niveles de concentración de madera dura: 5 %, 10 %, 15 % y 20 %. Para ello, deciden fabricar 6 especímenes de prueba para cada nivel de concentración, utilizando una planta piloto. Los 24 especímenes se someten a prueba en un probador de tensión de laboratorio, en un orden aleatorio, obteniéndose los siguientes datos:

Concentración de madera dura (%)	Observaciones					
5	7	8	15	11	9	10
10	12	17	13	18	19	15
15	14	18	19	17	16	18
20	19	25	22	23	18	20

Análisis de varianza usando el Statgraphics :

```
                            Analysis of Variance
-----------------------------------------------------------------------------
Source        Sum of Squares     Df  Mean Square    F-Ratio P-Value
-----------------------------------------------------------------------------
Between groups      382,792       3      127,597      19,61 0,0000
Within groups       130,167      20      6,50833
-----------------------------------------------------------------------------
Total (Corr.)       512,958      23
```

Como el $p-valor$ es cero, la decisión sería rechazar la hipótesis nula H_0, con lo cual no todos los porcentajes proporcionan la misma resistencia.

[Nota: Si como en el ejemplo anterior resulta que la diferencia entre las medias de los distintos tratamientos es significativa, podemos comparar las medias entre sí: LSD (*Least Significance Difference*, en el Statgraphics)].

Llega el momento de decir "hasta la vista" ☹ (porque eso sería buena señal ... ☺): espero que estos apuntes te hayan ayudado con las clases y si alguna vez necesitas "ayuda estadística", ya sabes "dónde vivo". ¡Qué te vaya muy bien!

THE END

Problemas del tema 6

1. Se sabe que la duración, en horas, de un foco de 75 watts tiene una distribución aproximadamente Normal. Al tomar una muestra aleatoria de 12 focos, se tiene una duración promedio $\overline{x} = 3250$ horas y una desviación $s = \sqrt{1000}$ horas.

   a) Construye un intervalo de confianza del 95 % para la duración promedio

   b) Supóngase que se desea una confianza del 95 % en que el error en la estimación de la duración promedio sea menor que 5 horas. ¿Qué tamaño de muestra debe emplearse para este fin, si por estudios previos se sabe que $\sigma^2 = 990$ horas?

   (Sol. : (3229.9077,3270.09), 153)

2. En un estudio sobre la efectividad del ejercicio físico para la reducción de peso, un grupo de 9 personas participaron en un programa prescrito de ejercicio físico durante 1 mes, obteniéndose:

Persona	Peso antes (Kg.)	Peso después(Kg.)
1	105	98
2	89	86
3	84	85
4	106	105
5	90	88
6	96	93
7	79	75
8	90	85
9	100	96

   Usando el nivel $\alpha = 0.01$, calcula el intervalo de confianza de la diferencia de medias e interprétalo.

   (Sol. : (1.33,4.89), como no contiene al cero sí existe diferencia de peso).

3. Se ha realizado un experimento para comparar las economías en combustible para dos tipos de camiones diesel equipados de forma similar. Se han usado 12 camiones de la marca A y 10 de la marca B en pruebas de velocidad constante de 90 km/h. Si los de la marca A promedian 16 kilómetros por litro con una desviación estándar de 1 kilómetro por litro y los de la marca B promedian 11 kilómetros por litro con una desviación estándar de 0.8 kilómetros por litro. Calcula un intervalo de confianza al 95 % para la diferencia de medias

y determina (razonando porqué) si existe diferencia en el consumo entre estas dos marcas de camiones. (Supón normalidad e igualdad de varianzas).

(Sol. : (4.182, 5.817), existe diferencia porque 0 no pertence al intervalo)

4. En una muestra aleatoria de 500 familias que tienen televisores en una cierta ciudad, se encuentra que 340 están suscritas a un cierto canal. Encuentra un intervalo de confianza de 95 % para la proporción real de familias en esta ciudad suscritas al canal. Determina también el tamaño muestral necesario si queremos tener una confianza de al menos 95 % de que nuestra estimación de p está dentro de 0.02, primero asumiendo la muestra anterior como una muestra preliminar que nos proporciona una primera estimación y en segundo lugar, sin contar con esta información.

   (Sol. : (0.64,0.72), 2090, 2401)

5. Se considera cierto cambio en un proceso de fabricación de partes de componentes. Se toman muestras del procedimiento existente y del nuevo para determinar si éste tiene como resultado una mejoría. Se encuentra que 75 de 1500 artículos del procedimiento actual son defectuosos y 80 de 2000 artículos del procedimiento nuevo también lo son. Encuentra un intervalo de confianza de 90 % para la diferencia real en la fabricación de defectuosos entre el proceso actual y el nuevo, e interprétalo.

   (Sol. : (-0.0017,0.0217), como contiene al cero, no hay razón para creer que el nuevo procedimiento producirá una disminución significativa en la producción de artículos defectuosos comparado con el método existente.)

6. Se investiga la resistencia a la tensión de ruptura de hilo proporcionado por dos fabricantes. Tomamos una muestra de 50 especímenes de prueba provenientes de cada fabricante, obteniéndose como resultados $\overline{x}_1 = 88$ psi y $\overline{x}_2 = 90$ psi con desviaciones respectivas 5 psi y 4 psi. Calcula un intervalo de confianza al 95 % para la diferencia entre las medias de la tensión de ruptura e interprétalo.

   (Sol. : (-3.775,-0.225), como $0 \notin$ al intervalo, existirá diferencia en cuanto a resistencia de los hilos entre ambos fabricantes)

7. Un fabricante de monitores prueba dos diseños de microcircuitos para determinar si producen un flujo de corriente equivalente. Los datos obtenidos son:

Diseño 1:	$n_1 = 21$	$\overline{x}_1 = 24.2$	$s_1^2 = 8$
Diseño 2:	$n_2 = 10$	$\overline{x}_2 = 23.9$	$s_2^2 = 25$

   Determina si las varianzas son iguales ($\alpha = 0.05$) y tras ello calcula el intervalo de confianza al 95 % correspondiente para la diferencia de medias e interprétalo.

   (Sol. : $1 \notin$ (0.08719,0.9088), con lo cual, asumiremos varianzas distintas. $0 \in$ (-3.398,3.998), con lo cual no hay razones para asumir flujos medios diferentes.)

8. Para el problema 12 del tema 3, determina si las variables son independientes ($\alpha = 0.05$).

   (Sol. : χ^2 = 108.7, rechazamos H_0, no son independientes)

9. Para el problema 15 del tema 3, determina si las variables son independientes ($\alpha = 0.05$).

   (Sol. : χ^2 = 9.38, rechazamos H_0, no son independientes)

10. Para el problema 16 del tema 3, determina si las variables son independientes ($\alpha = 0.05$).

    (Sol. : χ^2 = 2.32, no rechazamos H_0, no hay razones para pensar que no sean independientes)

11. Un artículo publicado en la revista *Materials Engineering* (1989, Vol. II, No. 4, págs. 275-281) describe los resultados de pruebas de resistencia a la adhesión de 22 especímenes de aleación U-700. La carga para la que cada especimen falla es la siguiente (en MPa):
    19.8 18.5 17.6 16.7 15.8 15.4 14.1 13.6 11.9 11.4 11.4 8.8 7.5 15.4
    15.4 19.5 14.9 12.7 11.9 11.4 10.1 7.9
    Suponiendo que la carga donde se presenta el fallo es Normal y usando $\alpha = 0.05$, construye la prueba de hipótsis adecuada para responder a la siguiente pregunta: ¿sugieren los datos que la carga promedio de fallo es mayor que 10 MPa?

    (Sol. : t=4.90 > 1.721, se rechaza H_0, la carga de fallo promedio es mayor que 10 MPa.)