

PROBLEMES TEMA 5

Exemple La durada de les bombones de butà de 40 kg de càrrega té aproximadament una distribució normal. La probabilitat que una bombona dure més de 220 hores és de 0.1587 i la probabilitat que dure menys de 190 hores és de 0.3085. Calculeu:

1. La mitjana i la desviació típica de la distribució.
2. La probabilitat que dure entre 195 i 215 hores.
3. La durada mínima que pot garantir-se amb un 80% de confiança.

1. $0.1587 = P(X > 220) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{220-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > \frac{220-\mu}{\sigma}) = 1 - P(Z \leq \frac{220-\mu}{\sigma})$, per tant $P(Z \leq \frac{220-\mu}{\sigma}) = 0.8413$ i aleshores mirant la taula: $\frac{220-\mu}{\sigma} = 1$
 $0.3085 = P(X < 190) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{190-\mu}{\sigma}\right) = P(Z < \frac{190-\mu}{\sigma}) = 1 - P(Z \geq \frac{190-\mu}{\sigma})$, per tant $P(Z \geq \frac{190-\mu}{\sigma}) = 0.6915$ i aleshores mirant la taula i tenint en compte la simetria de la normal: $-\frac{190-\mu}{\sigma} = 0.5$

Tenim 2 equacions i 2 incògnites: $220 - \mu = \sigma$, $-190 + \mu = 0.5\sigma$, es resol i s'obté $\mu = 200$ i $\sigma = 20$

2. $P(195 < X < 215) = P\left(\frac{195-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{215-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{195-200}{20} < Z < \frac{215-200}{20}\right) = P(-0.25 < Z < 0.75) = P(Z < 0.75) - P(Z < -0.25) = P(Z < 0.75) - (1 - P(Z < 0.25)) = (taula) = 0.7734 - (1 - 0.5987) = 0.3721$

3. $0.8 = P(X \geq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \geq \frac{a-200}{20}) = P(Z \leq -\frac{a-200}{20})$, llavors consultant la taula: $0.84 = -\frac{a-200}{20}$, i per tant $a = 183.2$ hores

1. En una gran fàbrica, els tubs fluorescents es mantenen encesos dia i nit. Els llums es fonen amb una mitjana de 120 al mes (30 dies). Suposant que es reemplaçen a l'instant i que el nombre de trencaments segueix una distribució Poisson. Calculeu les probabilitats que:

- (a) Es trenquen entre 100 i 120 llums (inclosos) en un mes
- (b) No es trenque cap llum un dia

(Sol. : 0.4892, 0.0183)

2. Suposem que el temps, en minuts, des del moment en que arribes a la parada del bus fins que arriba el primer autobús es modelitza mitjançant una distribució exponencial amb $\lambda = 0.37$. Trobar les probabilitats dels següents esdeveniments:

- (a) El següent bus arriba entre 2 i 4 minuts després que tu arribes
- (b) Esperes més de 2 minuts al primer bus

- (c) El primer bus arriba dins dels primers 90 segons
 - (d) No passa cap bus als primers 5 minuts d'estar a la parada
 - (e) Passa almenys un bus al primer minut
- (Sol: 0.2495, 0.4771, 0.4259, 0.1572, 0.3093)

3. La gent que freqüenta un cert karaoke té una probabilitat de 0.4 d'alejar-se i cantar. Cert dia hi ha 50 persones dins del karaoke. Quina és la probabilitat que almenys 10 persones s'alcen i canten?(Suposem que cada persona pren la decisió independentment de les altres).

(Sol. : 0.9988)

4. Un fabricant produeix pistons, els diàmetres dels quals es distribueix segons una Normal de mitjana 5 cm i desviació típica 0.001 cm. Per tal que un pistó servisca ha de trobar-se entre 4.998 i 5.002 cm. Si el diàmetre del pistó és menor que 4.998 cm es rebutja; si és major que 5.002 cm el pistó es recicla. Amb quina probabilitat serveix? Quina és la probabilitat de rebutjar-lo? I de reciclar-lo?

(Sol. : 0.9544, 0.0228, 0.0228)

5. Suposem que la probabilitat de tindre una unitat defectuosa en una línia d'encaix és de 0.05. Si el nombre d'unitats acabades constitueix un conjunt de proves independents i tenim 10 unitats:

- (a) Quina és la probabilitat que dos siguin defectuoses?
- (b) Quina és la probabilitat que com a màxim dos siguin defectuoses?
- (c) Quina és la probabilitat que almenys dos siguin defectuoses?

(Sol: 0.075, 0.9888, 0.0862)

6. El nombre de components que fallen abans de complir les 100 hores d'operació és comporta com una variable Poisson. Si el nombre mitjà d'aquestes és 8:

- (a) Quina és la probabilitat que falle un component en 25 hores de funcionament?
- (b) Quina és la probabilitat que fallen com a màxim dos components en 50 hores?
- (c) Quina és la probabilitat que fallen almenys 10 en 125 hores?

(Sol: 0.27067, 0.2381, 0.54207)

7. Un emissor envia un cert senyal. El receptor no el rep nítidament, sinó que un determinat soroll que pot modelitzar-se com una distribució uniforme a l'interval $[-1,1]$ s'afegeix al senyal. Quina és la probabilitat que en rebre el senyal, aquest tinga un soroll

- (a) major que 0.5?
- (b) entre -0.25 i 0.75?
- (c) menor que 0.25?

(Sol. : 0.25, 0.5, 0.625)

8. El temps necessari per tal d'armar certa unitat és una variable aleatòria normalment distribuïda amb una mitjana de 30 minuts i una variància de 4 minuts. Determinar el temps d'armat de tal manera que la probabilitat d'excedir aquest siga 0.2. De-terminar la probabilitat que es trigue menys de 27 minuts, entre 27 i 32 minuts i que es trigue més de 32 minuts.

(Sol. : 31.68, 0.0668, 0.7745, 0.1587)

9. La probabilitat que un xip resulte defectuós és de 0.001. Calculeu la probabilitat que en prendre una mostra a l'atzar de 2000 xips, resulten defectuosos:

- (a) almenys 3 xips
- (b) exactament 2 xips
- (c) com a màxim 1 xip
- (d) exactamet 5 xips

(Sol. : ~ 0.3233 , ~ 0.2708 , ~ 0.4059 , ~ 0.0361)

10. La demanda setmanal de bombetes en una ferreteria és una variable $N(300,81)$. Suposant que es fan comandes setmanals, calculeu la quantitat de bombetes que cal tenir a principi de setmana per poder satisfer la demanda un 95% de les setmanes. Quina és la probabilitat que la demanda estiga entre 280 i 310 bombetes?

(Sol: $\lceil 314.76 \rceil = 315$ bombetes, 0.8533)

11. Un aparell de mesura dona una lectura que pot considerar-se distribuïda segons una $N(\mu, \sigma^2)$, on μ és el valor real de la magnitud mesurada i $\sigma^2 = 9$. Per millorar la precisió es decideix prendre la mitjana \bar{X} de n mesures.

- (a) Calculeu el mínim n necessari perquè la variància de \bar{X} sigui inferior o igual a 0.1
- (b) Amb el valor de n obtingut a l'apartat anterior, calculeu la probabilitat que \bar{X} s'aparte del valor real en més de ± 0.2 unitats

(Sol. : 90, $P(|\bar{X} - \mu| > 0.2) = 0.5286$)

12. En una classe el 60% de l'estudiantat són dones i la resta homes. Si escollim una mostra a l'atzar de 12 estudiants:

- (a) Quina és la probabilitat que la meitat siguin dones?
- (b) Quina és la probabilitat que hi haja més de 4 homes?

(Sol. : 0.1766, 0.562)