

## Tema 3

# Control estadístico de calidad

- 3.1 Introducción. ¿Qué es el control estadístico de la calidad?
- 3.2 Introducción a los gráficos de control.
- 3.3 Gráficos de control para variables.
- 3.4 Gráficos de control de atributos.
- 3.5 Gráficos de control de suma acumulada.

Este tema está basado en el capítulo 15 del libro de Montgomery de la bibliografía (reprografía), donde los conceptos IMPORTANTES aparecen remarcados (subrayados).

### 3.1. Introducción. ¿Qué es el control estadístico de la calidad?

Este apartado se corresponde con los puntos 15.1, 15.2, 15.3 y 15.11 (☞ en prácticas se repasará el diagrama Pareto). Sólo añadir que aunque nosotros solamente trataremos el control estadístico de procesos, el control de calidad se clasifica en:

- a) Control en curso de fabricación (de procesos).
- b) Control de recepción y de producto acabado.

El control en curso de fabricación se realiza durante la fabricación del producto, a intervalos fijos de tiempo, y tiene por objeto vigilar el funcionamiento del sistema y recoger información para mejorarlo. El control de recepción y de producto acabado trata de encontrar una buena manera para decidir si un producto verifica las especificaciones establecidas.

**i** **Control de recepción:** un campo donde el muestreo juega un papel fundamental es en el control de recepción que trata de comprobar que los productos cumplan las especificaciones de calidad.

El más empleado es el control de recepción por atributos, en el que se inspeccionan por muestreo las unidades de un lote. Se seleccionan artículos de cada lote y se toma una decisión con base a dicha muestra respecto a si se acepta o se rechaza el lote, según el número de unidades defectuosas que contenga.

Para resolver esta cuestión podemos emplear los llamados planes de muestreo. Éstos podemos clasificarlos en:

a) Planes de aceptación/rechazo: los más conocidos son:

- las normas japonesas JIS Z 9002
- las normas norteamericanas Military Standard MIL- STD- 105D; UNE 66020

Éste último tiene en cuenta el tipo de inspección, así como el rigor de inspección.

Los muestreos pueden ser simples, dobles, múltiples y (en su caso extremo) secuencial (un muestreo es secuencial cuando después de cada observación se toma una de las siguientes decisiones: aceptar el lote, rechazarlo o seguir con el muestreo).

b) Planes de control rectificativo: los lotes rechazados se inspeccionan al 100 % sustituyendo los elementos defectuosos. Los más usados son los de Dodge-Romig.

Las tablas de estos planes y una explicación más detallada sobre muestreo podéis encontrarlos por ejemplo en Johnson, Peña (vol. I) y sobre todo en cualquier libro sobre Control de Calidad.

### 3.2. Introducción a los gráficos de control.

Este apartado se corresponde con el punto 15.4. En el punto 15.4.1. se recogen los principios básicos:

En todo proceso aparece una cierta variabilidad en la calidad, debida a causas aleatorias o no asignables: variabilidad de la materia prima, la precisión de las máquinas y de los instrumentos de medida, destreza de los operarios, etc.

Otras causas no aleatorias o asignables (materias primas defectuosas, desgaste de herramientas, deficiente preparación del operario, etc.) producen ciertos efectos previsibles y definidos. Son pocas y de aparición irregular, pero con grandes efectos. Son eliminables. Diremos que un proceso está en estado de control cuando no le afecta ninguna causa asignable. Un instrumento para determinar si se da o no esta situación son las gráficas de control.

El gráfico de control es una técnica de vigilancia en línea que puede ser utilizada para:

1. La detección rápida de causas asignables.
2. Estimar los parámetros del proceso de producción.
3. Obtención de información para la mejora del proceso, por ejemplo, reduciendo la variabilidad.

**Ejemplo 3.1.:** Una empresa de helados se dedica en una de sus plantas a la fabricación de helados de chocolate. El helado se vende en tarrinas de 1.5dl, a las que se controla su peso. A intervalos de tiempo de 10 minutos, se extraen cuatro tarrinas durante la producción y se considera su peso medio.

Véase el gráfico de control en el anexo de gráficos.

Un gráfico de control es una representación de una cantidad (media, rango, proporción, número de defectos, ...) en función del tiempo o número de muestra con unos límites de control. Falta todavía por determinar: ¿qué límites de control son los adecuados? y ¿cuándo un proceso está bajo control?

Si un punto se localiza fuera de los límites de control o aun encontrándose entre los límites de control, si se comportan de manera sistemática o no aleatoria, entonces también es un indicador de que el proceso está fuera de control. Existe una relación entre los gráficos de control y el contraste de hipótesis, estudiado en el tema anterior :

1. En cada punto del gráfico estamos contrastando la hipótesis de que el proceso se encuentra en estado de control estadístico.
2. Tenemos la probabilidad de error tipo I (concluir que el proceso está fuera de control cuando no lo está) y la probabilidad del error tipo II (concluir que el proceso está bajo control cuando no lo está).

Un modelo general de gráfico de control sería como sigue: sea  $W$  el estadístico muestral que mide la característica de calidad en la que se tiene interés. Las líneas central, inferior y superior vienen dadas por

$$\begin{aligned}LSC &= \mu_W + k\sigma_W, \\LC &= \mu_W, \\LIC &= \mu_W - k\sigma_W,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mu_W &= \text{media de } W, \\ \sigma_W &= \text{desviación típica de } W\end{aligned}$$

y  $k$  es la "distancia" de la línea central a los límites de control, siendo  $k = 3$  una elección bastante común. Estamos suponiendo que tanto la media,  $\mu_W$ , como la desviación típica de  $W$  son conocidas. Obviamente habitualmente esto no es así. Los parámetros son típicamente desconocidos y los habremos de estimar a partir de la muestra. La idea de utilizar estos gráficos se debe a Walter A. Shewhart y se habla del gráfico de control de Shewhart.

A continuación, clasificaremos los gráficos de control en dos tipos generales.

1. Gráficos de control de variables en donde la característica de calidad es una variable continua. A su vez tendremos gráficos de control para la tendencia central (gráfico  $\bar{x}$ ) y para la variabilidad (gráficos para la desviación típica y para el rango).
2. Gráficos de control de atributos: corresponden a aquellas situaciones en que la característica de calidad no puede ser medida en una escala continua o tan siquiera cuantitativamente. Podemos decidir si la unidad observada es conforme o no sobre la base de verificar o no unos ciertos atributos. O bien, podemos contar el número de defectos que aparece en una unidad de producto.

En otras palabras, lo anterior se resumiría en lo siguiente: el fundamento teórico de una gráfica de control se basa en la construcción, a partir de los valores de la esperanza  $\mu$  y la desviación típica  $\sigma$  del modelo teórico de distribución que sigue la característica de calidad, de un intervalo de control (generalmente  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ ). Dentro de este intervalo están casi todos los valores muestrales del proceso, si éste se encuentra bajo control. Las muestras se obtienen a intervalos regulares de tiempo. Un punto que cae fuera de los límites de control, indicaría que el proceso está fuera de control.

El control de calidad se realiza observando en cada elemento:

1) Una característica de calidad medible (longitud, resistencia, contenido de impurezas, etc.) que se compara con un estándar fijado. Es el control por variables (gráficas  $\bar{X}$ ,  $R$ ). La característica se supone distribuida normalmente.

2) Control por atributos:

2.a: Un atributo o característica cualitativa que el producto posee o no (correcto o defectuoso, por ejemplo). (Gráficas  $p$  y  $np$ ). La característica se supone distribuida según una Binomial.

2.b: El número total de defectos. (Gráficas  $u$  y  $c$ ). La característica se supone distribuida según una Poisson.

En el punto 15.4.2. se muestra un ejemplo sobre el diseño de una gráfica de control. Nosotros usaremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.2.:**[Fabricación de azulejos] Observamos  $X$  el grosor de los azulejos y vamos a suponer inicialmente que  $X \sim N(\mu = 4,39mm, \sigma = 0,025mm)$ . Tomamos cada día una muestra de  $n = 4$  azulejos (elegidos a distintas horas del día) y calculamos el grosor medio de la muestra. La característica que controlamos es

$$W = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

con  $n = 4$  de modo que

$$W \sim N(\mu_W = \mu, \sigma_W = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}),$$

o sea,

$$W \sim N(4'39, \frac{0'025}{\sqrt{4}}),$$

Los límites de control ( $k=3$ )  $3 - \sigma$  vienen dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_W + k\sigma_W = 4,4275 \\ LIC &= \mu_W - k\sigma_W = 4,3525 \end{aligned}$$

Véase el gráfico de control de la media en el anexo de gráficos.

El punto 15.4.3 trata el concepto de subgrupos racionales. En el punto 15.4.4. se proporcionan las reglas *Western Electric* como un procedimiento empírico para analizar patrones en gráficos

de control y detectar una condición fuera de control. Según estas reglas un proceso está fuera de control cuando:

1. Un punto cae fuera de los límites de control 3-sigma.
2. Dos de tres puntos consecutivos caen fuera de los límites 2-sigma.
3. Cuatro de cinco puntos consecutivos están fuera de los límites 1-sigma.
4. Entendemos que en las dos reglas anteriores los puntos que caen fuera de los límites de control están en el mismo lado, esto es, o son todos mayores que el límite superior correspondiente o menor que el límite inferior.
5. Ocho puntos consecutivos de la gráfica están en el mismo lado de la línea central.

Posteriormente, se volverá a insistir en este punto.

### 3.3. Gráficos de control para variables.

El punto 15.5. explica las gráficas de control para variables, en este apartado será necesario disponer de la tabla que se encuentran en reprografía para poder calcularlas.

Los gráficos de control  $\bar{X}$  y  $R$  (para características de calidad continuas), para los que los valores superior e inferior del gráfico de control  $\bar{X}$  son:

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{x}} + A_2\bar{r} \\ LC &= \bar{\bar{x}} \\ LIC &= \bar{\bar{x}} - A_2\bar{r} \end{aligned}$$

donde  $\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$  ( $\bar{X}_i$  es la media muestral de la muestra  $i$ -ésima, calculada con los  $n$  valores de cada muestra y  $m$  es el número total de muestras),  $\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$  (donde  $R_i$  es el rango de la muestra  $i$ -ésima) y la constante  $A_2$  aparece tabulada.

Por otro lado, la línea central y los límites de control superior e inferior de un gráfico  $R$  son:

$$\begin{aligned} LSC &= D_4\bar{r} \\ LC &= \bar{r} \\ LIC &= D_3\bar{r}. \end{aligned}$$

Los valores de  $D_3$  y  $D_4$  para distintos valores de  $n$  aparecen tabulados. Un estimador de  $\sigma$  es  $\hat{\sigma} = \bar{R} / d_2$ , donde  $d_2$  está tabulada.

Se ilustrará la construcción de estos gráficos mediante un ejemplo, en el que se mostrará también la construcción de los gráficos cuando utilizamos muestras preliminares (cálculo de los límites, determinación de las causas asignables si el proceso no ha estado bajo control y reconstrucción del gráfico una vez eliminadas las anomalías):

 **Ejemplo 3.3.:** [Red de computadoras] Para comprobar la adecuación de una red de computadoras, se ejecutan programas estándar *benchmark* periódicamente sobre la red. En cada

test, se seleccionan aleatoriamente tres de estos programas de una colección que poseen esencialmente el mismo tipo de instrucciones y llamadas Entrada/Salida. Se toman 20 muestras, calculándose el tiempo medio y rango.

Los datos de las medias y rangos son los siguientes:

3,22	0,88
4	0,72
3,38	0,68
3,02	0,5
3,23	0,64
3,66	0,37
3,9	0,75
2,98	0,45
3,44	0,64
3,32	1,33
5,02	1,21
2,98	0,39
3,66	0,64
3,88	0,8
3,02	0,62
4,1	0,58
3,22	0,45
3,25	0,69
3,87	0,73
3,5	0,6

Los gráficos de  $\bar{X}$  y  $R$  que se obtienen con esos datos están en el anexo, junto con los gráficos recalculados tras eliminar el punto 11. Estima también la media y desviación típica, una vez que el proceso estuviera bajo control.

Pautas para interpretar gráficos de control  $\bar{X}$  y  $R$ :

- a) Puntos fuera de control en  $\bar{X}$ ;  $R$  en control: indica un cambio en la media
- b) Puntos fuera de control en  $\bar{X}$  y en  $R$ : indica un cambio en la variabilidad.
- c) Rachas: 7 puntos consecutivos por encima o debajo de la media. Puede indicar (si  $R$  está bajo control) cambios en la media (por cambios en la materia prima, el servicio de mantenimiento, etc.)
- d) Tendencias: 6 puntos seguidos en sentido creciente o decreciente. Indica la presencia de algún factor que influye gradualmente en el proceso: desgaste de la maquinaria, cambios de temperatura, fatiga (en la gráfica  $\bar{X}$ ); envejecimiento de la maquinaria, mezclas (en  $R$  en sentido ascendente); mejora de los operarios o del mantenimiento (en  $R$  en sentido descendente).

e) Periodicidades o ciclos: repetición de agrupamientos (sucesión de picos y valles). Indican la presencia de efectos periódicos: temperatura, oscilaciones de corriente (en  $\bar{X}$ ); turnos, acciones de mantenimiento (en  $R$ ).

f) Inestabilidad: grandes fluctuaciones. Puede indicar un sobreajuste de la máquina, mezcla de materiales, falta de entrenamiento del operario de la máquina.

g) Sobreestabilidad: la variabilidad de las muestras es menor que la esperada (acumulación de puntos en la zona central). Puede que los límites estén mal calculados, que se hayan tomado incorrectamente los datos o que se haya producido un cambio positivo temporal cuya causa debe investigarse.

**i** Si en lugar de valores pequeños para  $n$ , se usan valores mayores que 10 o 12, la estimación de la desviación típica basándonos en el rango es poco eficaz, así que se utilizarán los gráficos  $\bar{X}$  y  $S$ , cuyos límites pueden calcularse y serían para el gráfico  $\bar{X}$ :

$$\begin{aligned}LSC &= \bar{\bar{x}} + A_3\bar{S} \\LC &= \bar{\bar{x}}, \\LIC &= \bar{\bar{x}} - A_3\bar{S}\end{aligned}$$

con  $A_3$  tabulada y

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i,$$

siendo  $S_i$  la desviación típica de la muestra  $i$ -ésima. Los límites para el gráfico  $S$  serían:

$$\begin{aligned}LSC &= B_4\bar{S}, \\LC &= \bar{S}, \\LIC &= B_3\bar{S},\end{aligned}$$

nuevamente  $B_4$  y  $B_3$  se encuentran tabuladas.

**ii** El punto 15.6 sólo se tratará en prácticas: se presentarán los gráficos de control para mediciones individuales, pues en ocasiones el tamaño muestral es  $n = 1$ , como en las siguientes:

1. Se utiliza tecnología de medición e inspección automatizada, con lo que se analiza cada unidad producida.
2. El ritmo de producción es lento, y resulta inconveniente permitir que muestras de tamaño  $n > 1$  se acumulen antes de ser analizadas.

3. Las mediciones repetidas de un proceso difieren sólo debido a errores en el laboratorio o a errores en el análisis, como sucede en muchos procesos químicos.

Debido a la dificultad de interpretación del gráfico de rangos móviles por estar correlacionados y la menor sensibilidad del gráfico de mediciones individuales para la detección de pequeños desplazamientos de la media, se verán en este mismo tema (en prácticas ) otra alternativa como es el gráfico de suma acumulada.

En el punto 15.7 se plantea la problemática de que el funcionamiento de un proceso en estado de control, no garantiza que sea capaz de producir un resultado suficientemente correcto para cumplir los estándares o especificaciones de calidad que se le exijan.

Se introducirán dos índices para comprobar la capacidad de un proceso:

$$ICP = \frac{LSE - LIE}{6\sigma},$$

donde  $LSE$  y  $LIE$  son los límites superior e inferior de especificación.

Se mostrará la interpretación del ICP:  $(1/ICP)100$  es el porcentaje del ancho de las especificaciones utilizadas por el proceso, por ello:

- (a)  $ICP > 1$ : pocas unidades defectuosas.
- (b)  $ICP = 1$ : 0.27 % de unidades defectuosas.
- (c)  $ICP < 1$ : muchas unidades defectuosas.

La definición de ICP asume que el proceso está centrado en la dimensión nominal. Es razonable considerar ICP como una medida de la capacidad potencial (si estuviera centrado entonces sí que mediría su capacidad). Por ello, se define  $ICP_k$  como un indicador más robusto frente a la no centralidad del proceso:

$$ICP_k = \min\left\{\frac{LSE - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LIE}{3\sigma}\right\}.$$

En muchas compañías se suele utilizar:  $ICP=1.33$  de un modo genérico y  $ICP=1.66$  si la característica de calidad se refiere a resistencia, seguridad u otras características críticas. También se utiliza  $ICP_k = 2$  que recibe el nombre de *proceso 6-sigma* ya que la distancia entre la media y la especificación más cercana es de seis desviaciones estándar.

 **Ejemplo 3.2.:** Para este ejemplo, supondremos que las especificaciones son  $4.4 \pm 0.05$  mm. Calcula los dos índices anteriores, y también la probabilidad de producir unidades por encima, por debajo de las especificaciones, y en definitiva defectuosas.

Otro concepto interesante que se encuentra en el punto 15.9, es el de la longitud de corrida

promedio (ARL, *average run length*) que nos proporcionará el número medio de puntos que deben representarse antes que cualquier punto exceda los límites de control. Si  $p$  es la probabilidad de que cualquier punto exceda los límites de control, entonces  $ARL = 1/p$ .

 **Ejemplo 3.2.:** ¿Cuál es la ARL, para el gráfico  $\bar{X}$  con límites 3-sigma?

 **Ejemplo 3.2.:** Supongamos que el proceso se sale de control y la media se corre a 4.37. ¿Cuál es la probabilidad de que el desplazamiento se detecte en la primera muestra después del corrimiento? ¿Cuál es la ARL después del corrimiento?

### 3.4. Gráficos de control de atributos.

En el punto 15.8.1. se trata la gráfica  $P$ . Es un gráfico de control para la fracción de artículos defectuosos o que no cumplen con las especificaciones, que se basa en la distribución binomial. Sus límites pueden calcularse como:

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ LC &= \bar{p} \\ LIC &= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}, \end{aligned}$$

donde  $\bar{p}$  es el estimador de  $p$  (fracción defectuosa del proceso), obtenido mediante:

$$\bar{p} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{p}_i$$

con  $\hat{p}_i$  la proporción muestral de unidades defectuosas en la muestra  $i$ -ésima.

Estos límites se han basado en la aproximación normal de la binomial, que podría no ser adecuada si  $p$  es pequeño. Si el número de muestras tomadas cada vez no es el mismo, los límites se calcularían análogamente, produciendo límites no constantes de muestra a muestra.

 **Ejemplo 3.4.:** [Fusibles defectuosos] Un fabricante de fusibles para terminales de computadora quiere vigilar el proceso de producción, contruyendo una gráfica  $P$ . Para ello, cada hora

durante un periodo de 25 horas, selecciona al azar 100 fusibles de la línea de producción y los prueba, obteniendo el número de fusibles defectuosos. Los datos fueron (fusibles defectuosos de los 100, tomados cada hora): 6 4 9 3 0 6 4 2 1 2 6 3 4 5 5 4 1 3 0 3 7 9 2 11 3. Calcula los límites de la gráfica de control  $P$  con estos datos. Determina si el proceso está bajo control. De no ser así, supongamos que pueden encontrarse las causas asignables y que los puntos fuera de control pueden eliminarse, tras lo cual, revisa los límites de control. (En el anexo de las gráficas, puedes encontrar estos gráficos).

Cuando un punto muestral caiga fuera de los límites de control, las posibles opciones son:

- a) El proceso ha variado, aumentando o disminuyendo (según el sentido del valor extremo) el valor de  $p$ .
- b) El sistema de medición ha cambiado (el inspector o los criterios de medida).
- c) Se ha cometido un error al estimar el valor de  $p$  en dicha muestra.
- d) El proceso no ha variado, pero los límites de control son erróneos.
- e) Nada ha cambiado, simplemente un suceso poco frecuente ha ocurrido.

De igual forma, es posible controlar el número de unidades defectuosas en una muestra, para lo cual usaríamos las gráficas  $NP$ , con límites ( $n$  es el tamaño muestral de cada muestra):

$$\begin{aligned} LSC &= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\ LC &= n\bar{p} \\ LIC &= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \end{aligned}$$

En el punto 15.8.2. se considera el gráfico  $U$ . Cuando lo que interesa es controlar el número de defectos que aparecen en un individuo más que el número de individuos defectuosos, utilizaremos estos gráficos. Por ejemplo, supongamos que revisamos un monitor TFT, concretamente el número de píxeles en mal estado. Si el número de píxeles no es muy grande el producto puede prestar su servicio con una buena calidad. Obviamente, un número excesivo de píxeles que no funcionan adecuadamente será algo desagradable para el usuario y finalmente repercutirá en la venta del mismo.

Seguidamente, se presentará el gráfico  $U$ , gráfico de control de defectos por unidad. Utilizamos el promedio de defectos por unidad en la muestra. Si tenemos  $n$  (que puede no ser un entero)

unidades y un total de defectos  $C$  entonces

$$U = \frac{C}{n},$$

es el promedio de defectos por unidad. Con  $m$  muestras preliminares y valores aleatorios  $U_1, \dots, U_m$  entonces el número medio de defectos por unidad es

$$\bar{U} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m U_i.$$

El gráfico de control  $U$  es el siguiente (también nos basamos en la aproximación normal de la distribución de Poisson):

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} \\ LC &= \bar{u} \\ LIC &= \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} \end{aligned}$$

Este gráfico, a diferencia del gráfico  $C$  (que se verá seguidamente), se puede utilizar en aquellos casos en que no se puede tomar una unidad del mismo tamaño para controlar el número de defectos, pudiendo obtener límites no constantes.

 **Ejemplo 3.5.:** [Número de defectos en cubiertas para PCs] Unas cubiertas para computadoras personales se fabrican por moldeo por inyección. Se toman periódicamente muestras de cinco cubiertas del proceso y se registra el número de defectos. Los datos obtenidos para 25 muestras fueron: 3 2 0 1 4 3 2 4 1 0 2 3 2 8 0 2 4 3 5 0 2 1 9 3 2. Calcula los límites de la gráfica de control  $U$  con estos datos. Determina si el proceso está bajo control. De no ser así, supongamos que pueden encontrarse las causas asignables y que los puntos fuera de control pueden eliminarse, tras lo cual, revisa los límites de control. (En el anexo de las gráficas, puedes encontrar estos gráficos).

Con el gráfico  $C$  controlamos el número de defectos en una muestra de tamaño  $n$ . Se toma como distribución de referencia la distribución de Poisson. Los límites de este gráfico serían:

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \\ LC &= \bar{c} \\ LIC &= \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \end{aligned}$$

donde  $\bar{c}$  sería el estimador de  $\lambda$ , el parámetro de la distribución de Poisson, obtenido mediante:

$$\bar{C} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m C_i.$$

siendo  $C_i$  el número de defectos de la muestra  $i$ -ésima.

### 3.5. Gráficos de control de suma acumulada.

Este punto se verá en prácticas  y se encuentra en el punto 15.10.

Para finalizar el tema, se presentarán los gráficos de control de suma acumulada (CUMSUM), que al igual que los anteriores pueden aplicarse en áreas diversas como control de procesos industriales, administración, ciencias médicas, marketing, comercio, biología, etc.

Estos gráficos surgieron como alternativa a los gráficos Shewart, que son poco sensibles a pequeños corrimientos de la media (del orden de  $1.5 \sigma$  o inferiores). Esto se debería a que sólo utilizan información del último punto. No consideran toda la secuencia. Alternativas como las reglas de la Western Electric tienen inconvenientes: (i) se complica la interpretación del gráfico; (ii) la longitud de corrida promedio bajo control se reduce por debajo de 370. Este incremento de las falsas alarmas puede tener consecuencias serias en la práctica.

Usaremos los gráficos de la suma acumulada para promedios muestrales y mediciones individuales (para las que son particularmente eficaces), aunque también se pueden plantear para el número de defectos, desviaciones estándar ... Supongamos que  $\mu_0$  es el objetivo para la media del proceso y  $\bar{X}_j$  es la  $j$ -ésima media muestral, entonces el gráfico de control de suma acumulada consiste en representar las sumas dadas por la siguiente ecuación

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0),$$

con  $i = 1, \dots, m$ . Notemos que las sumas  $S_i$  combinan información de distintas muestras. El punto básico a tener en cuenta es que si el proceso está bajo control alrededor de  $\mu_0$ , los distintos  $S_i$  han de fluctuar alrededor de cero. Si la media se desplaza a  $\mu_1$  mayor que  $\mu_0$  entonces los  $S_i$  tenderán a tomar valores positivos y cada vez mayores. Si la media se desplaza a  $\mu_1$  menor que  $\mu_0$  entonces los  $S_i$  tenderán a tomar valores negativos y cada vez menores. En consecuencia, la observación de una tendencia en el gráfico es un indicativo de que ha habido una modificación de la media y la búsqueda de alguna causa asignable debiera hacerse.

Este gráfico no es una gráfica de control, ya que no tiene límites de control. Dos son los enfoques que se usan para determinar los "límites de control": el procedimiento de la máscara V y el CUMSUM tabular, en el que se definen una CUMSUM de cola superior e inferior, que acumulan las desviaciones del valor objetivo mayores que cierta cantidad. El proceso estaría fuera de control si exceden cierta constante.

## Problemas del tema 3

1. En una fabricación de resistores se toman 20 muestras de tamaño 4, obteniendo  $\sum \bar{x}_i = 8620$ ,  $\sum R_i = 910$ , siendo  $\bar{x}_i$  y  $R_i$  la media y rango de cada muestra. Se pide:
  - a) Encuentra los límites de control de los gráficos  $\bar{X}$  y  $R$ .
  - b) Suponiendo que el proceso está bajo control, estima la media y desviación típica del proceso.
  - c) Si los límites de tolerancia son  $430 \pm 30$ , calcula e interpreta  $ICP$  e  $ICP_k$ .
  - d) Además, determina el porcentaje de elementos defectuosos en la fabricación.

(Sol. : media:  $431 \pm 33.17$  y rango:  $(0,103.8)$ ; media:  $431$ , desviación típica:  $22.1$ ;  $ICP = 0.45$ ,  $ICP_k = 0.437$ , proceso no centrado y proceso no apto;  $17.59\%$ )

2. Los datos siguientes representan el número de defectos de soldadura observados en 24 muestras de cinco tarjetas de circuitos impresos: 7 6 8 10 24 6 5 4 8 11 15 8 4 16 11 12 8 6 5 9 7 14 8 21.
  - a) Utilizando todos los datos, calcula los límites de control para una gráfica U.
  - b) ¿Puede concluirse que el proceso está bajo control? De no ser así, supón que pueden encontrarse las causas asignables, y recalcula los límites de control una vez eliminados los puntos fuera de control.

(Sol. :  $LCS= 3.811$   $LC=1.94167$   $LCI= 0.072$ ; hay dos puntos fuera de control,  $LCS= 3.463$   $LC=1.709$   $LCI= 0$ )

3. Se usa una matriz de extrusión para producir varillas de aluminio. El diámetro de las varillas es una característica crítica de la calidad. Se toman 19 muestras de cinco varillas cada una. Las especificaciones de las varillas son  $35 \pm 9$ , y los datos obtenidos fueron:

$$\sum_{i=1}^{19} \bar{x}_i = 647,8, \text{ y } \sum_{i=1}^{19} r_i = 109.$$

- a) Usando dichos datos, calcula los límites de control de prueba de los gráficos  $\bar{X}$  y  $R$ .
- b) Suponiendo que el proceso está bajo control, estima la media y desviación típica del proceso.
- c) ¿Cuál es el porcentaje de unidades defectuosas que se está produciendo en este proceso?

- d) Calcula el  $ICP$  y el  $ICP_k$ , e interprétalos.
- e) Supongamos que la media se corre a 38. ¿Cuál es la probabilidad de que el desplazamiento se detecte en la primera muestra después del corrimiento?
- f) ¿Cuál es la ARL después del corrimiento?

(Sol. : media :  $LCS= 37.4$   $LC=34.0947$   $LCI= 30.78$ , rango:  $LCS= 12.13$   $LC=5.737$   $LCI= 0$ ;  $34.0947$  y  $2.466$  respectivamente;  $0.05\%$ ;  $1.22$  y  $1.1$  proceso no centrado y tampoco llegaría a  $1.33$ , su capacidad no sería alta; $0.7088$ ;  $1.41$ )

4. Se monitorea la longitud total del cuerpo de un encendedor de cigarrillos usado en una aplicación automotriz utilizando los gráficos  $\bar{X}$  y  $R$ . Se toman 20 muestras de tamaño 4, obteniéndose:

$$\sum_{i=1}^{20} \bar{x}_i = 214,25, \text{ y } \sum_{i=1}^{20} r_i = 135.$$

- a) Usando dichos datos, calcula los límites de control de prueba de los gráficos  $\bar{X}$  y  $R$ .
- b) Suponiendo que el proceso está bajo control, estima la media y desviación típica del proceso.
- c) Si las especificaciones son  $10 \pm 5$ , ¿cuál es el porcentaje de unidades defectuosas que se está produciendo en este proceso?
- d) Calcula el  $ICP$  e interprétalo.
- e) Supongamos que la media se corre a 14.5. ¿Cuál es la probabilidad de que el desplazamiento se detecte en la primera muestra después del corrimiento?
- f) ¿Cuál es la ARL después del corrimiento?

(Sol. : media :  $LCS= 15.63325$   $LC=10.7125$   $LCI= 5.79175$ , rango:  $LCS= 15.4035$   $LC=6.75$   $LCI= 0$ ;  $10.7125$  y  $3.278$  respectivamente;  $13.6\%$ ;  $0.508$  el proceso es muy pobre; $0.245$ ;  $4.08$ )

5. El contenido de cobre de un baño de plateado se mide tres veces por día. A continuación se muestran los datos obtenidos en 25 días:

$$\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i = 157,09, \text{ y } \sum_{i=1}^{25} r_i = 28,32.$$

- a) Usando dichos datos, calcula los límites de control de prueba de los gráficos  $\bar{X}$  y  $R$ .
- b) Suponiendo que el proceso está bajo control, estima la media y desviación típica del proceso.
- c) Si las especificaciones son  $6 \pm 1$ , ¿cuál es el porcentaje de unidades defectuosas que se está produciendo en este proceso?
- d) Calcula el  $ICP_k$  e interprétalo.
- e) Supongamos que la media se corre a 5.5. ¿Cuál es la probabilidad de que el desplazamiento se detecte en la primera muestra después del corrimiento?

f) ¿Cuál es la ARL después del corrimiento?

(Sol. : media :  $LCS= 7.4424$   $LC=6.2836$   $LCI= 5.12474$ , rango:  $LCS= 2.91696$   $LC=1.13$   $LCI= 0$ ;  $6.2836$  y  $0.6691$  respectivamente;  $16.97\%$ ;  $0.35689$  el proceso es muy pobre; $0.163$ ;  $6.13$ )

6. Seguidamente se recogen el número de neumáticos defectuosos en 24 muestras preliminares, cada una compuesta de 100 neumáticos: 6 3 2 3 1 5 2 4 0 6 4 2 4 2 12 2 4 3 6 7 4 3 5 7.

a) Utilizando todos los datos, calcula los límites de control para una gráfica P.

b) ¿Puede concluirse que el proceso está bajo control? De no ser así, supón que pueden encontrarse las causas asignables, y recalcula los límites de control una vez eliminados los puntos fuera de control.

(Sol. :  $LCS= 0.099$   $LC=0.04$   $LCI= 0$ ; hay un punto fuera de control,  $LCS= 0.094$   $LC=0.037$   $LCI= 0$ )

7. Para estudiar el funcionamiento de un muelle de descarga se establece un gráfico de control. Los camiones llegan a una media de 6.2 a la hora.

a) Diseña un gráfico de control para estudiar el sistema.

b) ¿Cuáles serían los límites de control para llegadas diarias? (8 horas de trabajo, que tomaremos como unidad de medida).

(Sol. :  $6.2 \pm 3\sqrt{6,2}$ ;  $49.6 \pm 3\sqrt{49,6}$ )



## Autoevaluación del tema 3

1. **Ejercicio 1:** En una máquina que produce bobinas de papel aparecen en promedio 7 manchas cada 10 metros. Cada treinta minutos el operador observa pasar 10 m de papel y anota el número de manchas en un gráfico. ¿Cuál es el gráfico adecuado y cuáles son los límites de control?
2. **Ejercicio 2:** Deben construirse las gráficas de control  $\bar{X}$  y  $R$  para una importante característica de calidad. El tamaño de la muestra es  $n = 5$ , y  $\bar{x}$  y  $r$  se calculan para cada una de 35 muestras preliminares. Los datos resumidos son:

$$\sum_{i=1}^{35} \bar{x}_i = 7805, \text{ y } \sum_{i=1}^{35} r_i = 1200.$$

- a) Encuentra los límites de control de prueba de los gráficos  $\bar{X}$  y  $R$ .
- b) Suponiendo que el proceso está bajo control, estima la media y desviación típica del proceso.

Supongamos que la característica de calidad tiene una distribución normal con las especificaciones  $220 \pm 40$ . Si la pieza supera el límite superior de especificación puede reelaborarse. Sin embargo, si está por debajo del límite inferior de especificación debe desecharse.

- c) ¿Qué porcentaje hemos de desechar y qué porcentaje hemos de reelaborar? ¿Cuál es el porcentaje de unidades defectuosas que se está produciendo en este proceso?
- d) Calcula el  $ICP$  y el  $ICP_k$ , e interprétalos.

Supongamos que la media se corre a 215.

- e) ¿Cuál es la probabilidad de que el desplazamiento se detecte en la primera muestra después del corrimiento?
- f) ¿Cuál es la ARL después del corrimiento?

3. ⚡ **Ejercicio 3:** Para controlar de forma aproximada un generador de números aleatorios (de una uniforme(0,1)) se dibuja la suma cada 100 dígitos consecutivos generados. Determinar el gráfico de control correspondiente.

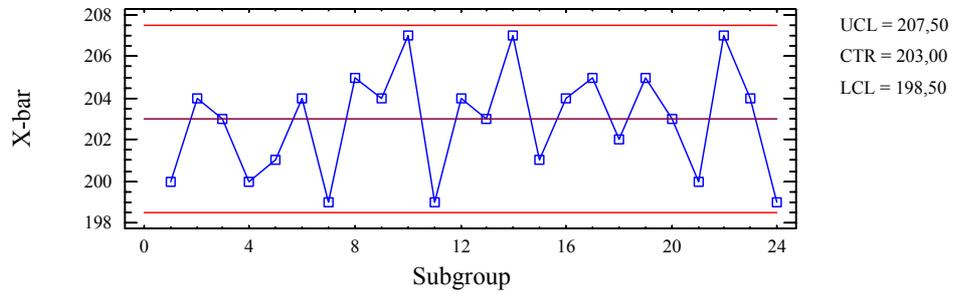


Gráfico de control del ejemplo 3.1

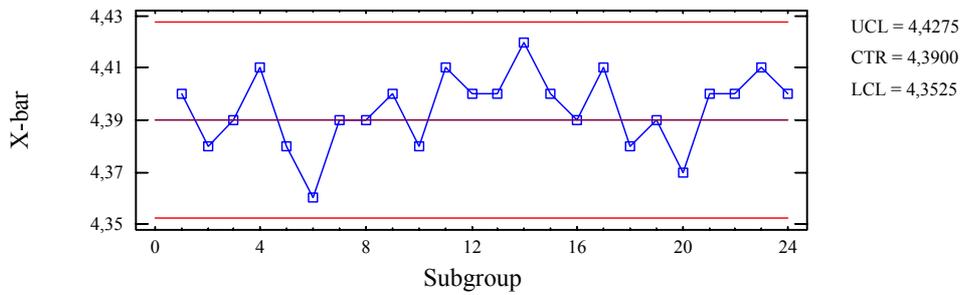


Gráfico de control del ejemplo 3.2

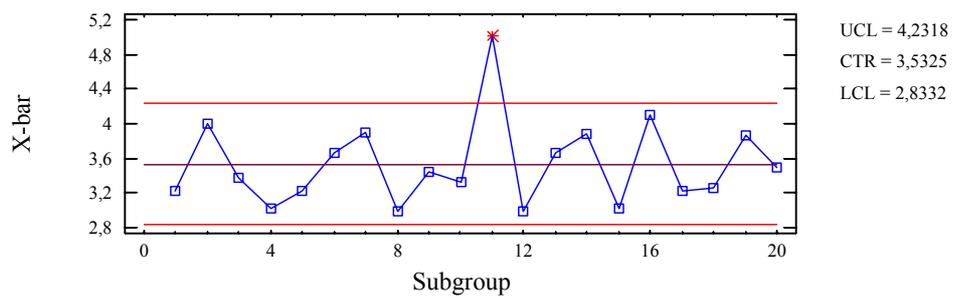


Gráfico de control para la media del ejemplo 3.3

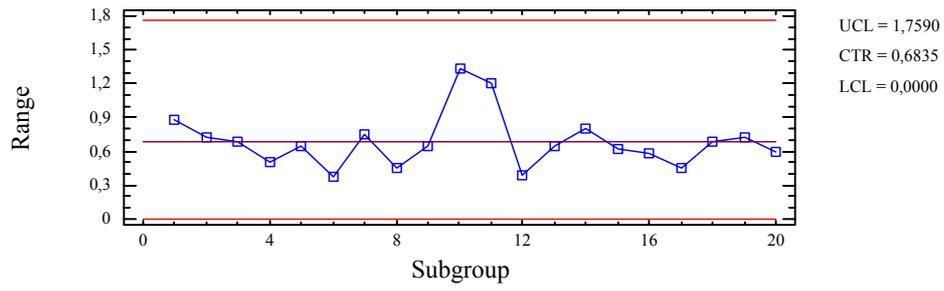


Gráfico de control para el rango del ejemplo 3.3

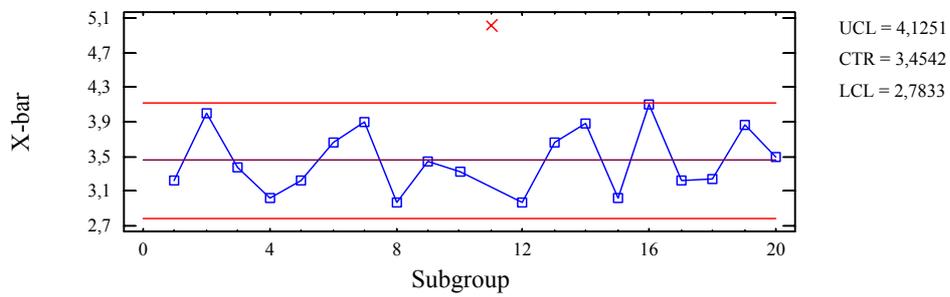


Gráfico de control para la media del ejemplo 3.3 (eliminado el punto 11)

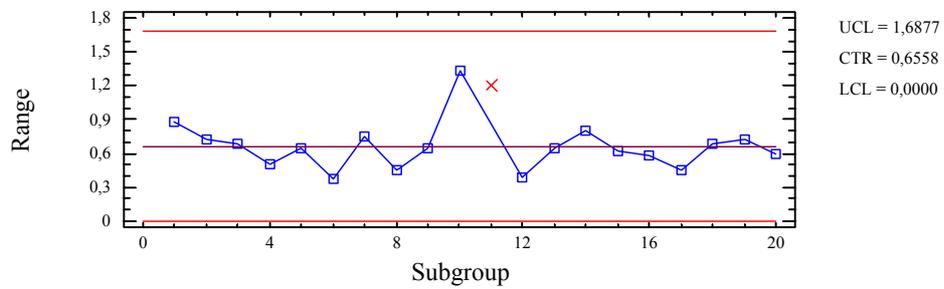


Gráfico de control para el rango del ejemplo 3.3 (eliminado el punto 11)

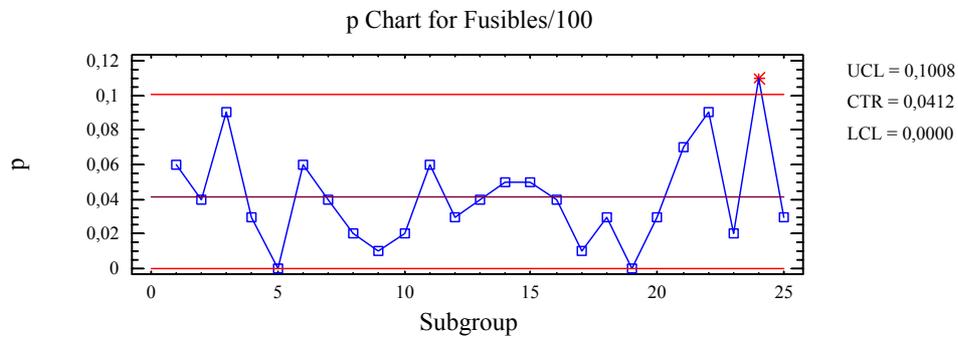


Gráfico de control P del ejemplo 3.4

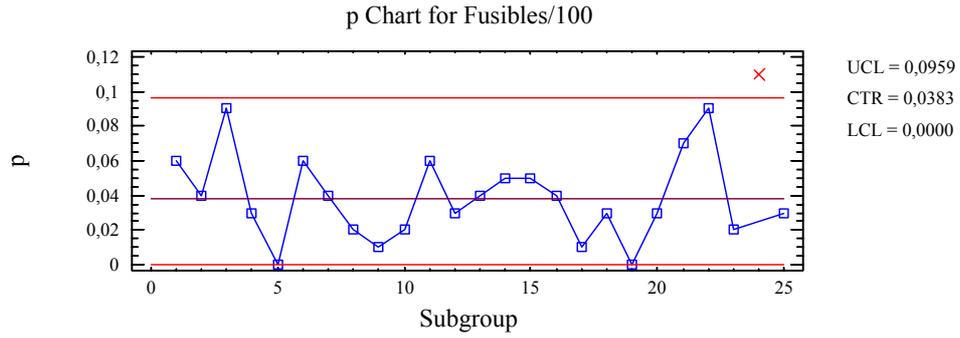


Gráfico de control P del ejemplo 3.4 (eliminado el grupo 24)

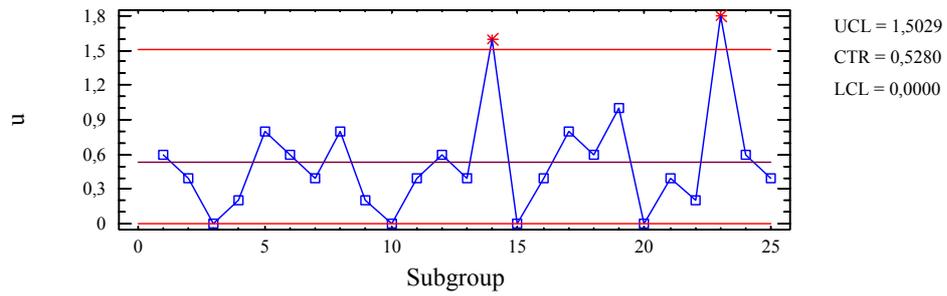


Gráfico de control U del ejemplo 3.5

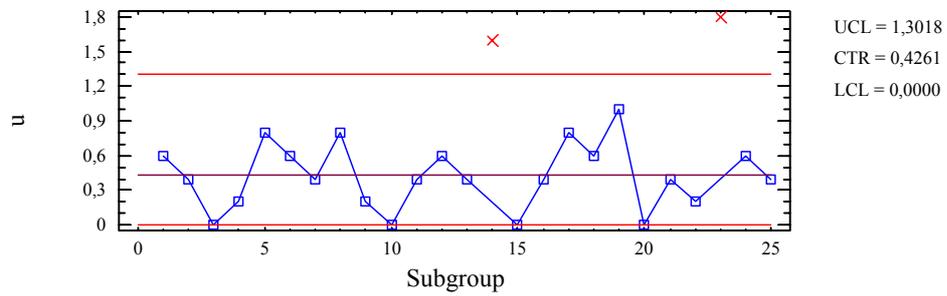


Gráfico de control U del ejemplo 3.5 (eliminados los grupos 14 y 23)