Tema 4. Variables aleatorias discretas

Cuestiones de Verdadero/Falso

1. En un proceso de Bernoulli, hay exactamente dos posibles resultados en cada prueba.
2. La fórmula $\mu = n \cdot p$ se usa para encontrar el valor esperado de cualquier variable discreta.
3. Las variables discretas sólo pueden tomar valores positivos.
4. Para una variable Poisson, la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales es mayor que 1, porque es una suma con infinitos sumandos.
5. Una variable Binomial puede aproximarse por una Poisson, si n es grande, p pequeña y $n \cdot p$ moderada.
6. Si $X =$ "número de fallos en 1 hora" es Poisson(4), $Y =$ "número de fallos en 1 día" es Poisson$(24 \cdot 4) =$ Poisson(96).
7. Para controlar la proporción de neumáticos con imperfecciones, podemos usar una gráfica p.
8. Cuando gastamos la gráfica u en control de calidad, se asume que el modelo de distribución en que basa su construcción es una Poisson.
9. La variable $X =$ "número de manchas en un esquí" es Binomial(1,p), donde p es la proporción de esquís defectuosos.
10. Si $X \sim$ Binomial(7,0.4), los valores que puede adoptar X son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
11. Si $X \sim$ Poisson(6), los valores que puede adoptar X son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
12. En una ciudad el jueves por la noche, la mitad de la audiencia mira el canal 6, el 40% el canal 12 y el restante 10% el canal 13 (¡el canal de los afortunados!). Para encontrar la probabibilidad que de 10 televidentes en jueves noche, 5 vean el canal 6, 4 el canal 12 y uno el canal 13, usaremos una variable Binomial.
13. Al aproximar una Binomial con una Poisson, $\frac{e^{-np}(np)^x}{x!}$ aproxima el valor de $\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x q^{n-x}$.

Cuestiones a completar

1. Una variable discreta puede tomar un conjunto finito o infinito numerable (contable) de valores, cada uno de los cuales con una cierta (posibilidad, probabilidad) ____________________ asociada.

2. Para tener un modelo Binomial de parámetros n y p debemos repetir un experimento ____ veces y cada prueba tendrá sólo (1,2,3) ____ resultado/s posible/s: (____________y ____________). La probabilidad del éxito es _____ y la probabilidad del fracaso es _____. Ambas probabilidades (se mantienen constantes, pueden variar) ________________________ durante todo el proceso.

3. Una variable que puede tomar los valores: -1, -0.5, 0, 0.5 y 1 es una variable (discreta, continua, categórica) ____________________

4. Lanzamos un dado 4 veces. Consideramos éxito "sacar 5". Para calcular la probabilidad de obtener como mucho 2 éxitos, consideraremos una variable (Binomial, Poisson, Uniforme) ____________ de parámetro/s ____________. Lo plantearemos como (P(X $\leq$ 2), P(X $<$ 2), P(X $\geq$ 2), P(X $>$ 2), P(X = 2)) __________________ y valdría (0.1157, 0.983797, 0.868, 0.016) ________.

5. Para tener un modelo Poisson de parámetro λ, el número (mínimo, medio, máximo) ____________ de ocurrencias debe ser _____.

6. Se ha comprobado que la aplicación de cierto tratamiento previo produce un aumento de la elasticidad en el 90% de las piezas. Si se aplica el tratamiento a 8 piezas, el número de piezas que se espera que aumenten su elasticidad es ________. Para calcular la probabilidad de obtener al menos 3 piezas más elásticas, consideraremos una variable (Binomial, Poisson, uniforme) __________________ de parámetro/s ____________. Lo plantearemos como (P(X $\leq$ 3), P(X $<$ 3), P(X $\geq$ 3), P(X $>$ 3), P(X = 3)) ____________ y valdría (0.999977, 0.8132, 0.1489) ________. Para ahorrar cálculos lo habremos calculado como (1 - P(X $\leq$ 3), 1 - P(X $<$ 3), 1 - P(X $\geq$ 3), 1 - P(X $>$ 3), 1 - P(X = 3)) __________.

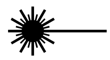
7. El modelo Binomial se aproxima al modelo (Poisson, uniforme, Normal) __________ cuando n es (grande, moderada, pequeña) __________ y p es (grande, moderada, pequeña) __________. El producto _____ es igual al parámetro λ.

8. En las carreteras valencianas hay una media de 20 muertos por accidente de tráfico en un mes. Para calcular la probabilidad de que haya más de 3 muertos en un mes, consideraremos una variable (Binomial, Poisson, uniforme) __________________ de parámetro/s ____________. Lo plantearemos como (P(X $\leq$ 3), P(X $<$ 3), P(X $\geq$ 3), P(X $>$ 3), P(X = 3)) __________________ y valdría (0.999997,0.0222, 0.689411)________. Para ahorrar cálculos lo habremos calculado como (1 - P(X $\leq$ 3), 1 - P(X $<$ 3), 1 - P(X $\geq$ 3), 1 - P(X $>$ 3), 1 - P(X = 3)) __________________. Si hubiésemos querido conocer la probabilidad de que hubiese más de 3 muertos en dos meses, consideraríamos una variable (Binomial, Poisson, uniforme) __________________ de parámetro/s ____________.

9. La probabilidad de que un artículo producido por una máquina especial sea defectuoso es igual a 0'1. Si se seleccionan al azar 20 artículos, para calcular la probabilidad de que no se encuentre más de un artículo defectuoso consideraremos una variable (Binomial, Poisson, uniforme) __________________ de parámetro/s ____________. Lo plantearemos como (P(X $\leq$ 1), P(X $<$ 1), P(X $\geq$ 1), P(X $>$ 1), P(X = 1)) __________________ y valdría (0.98951,0.00256,0.391747) ________.

10. Nombra 3 modelos de distribuciones discretas: ____

Cuestiones de Elección Múltiple

En un día no determinado (es *top secret*), el Dr. Bacterio se encontraba en su laboratorio preparando el último componente que necesitaba para acabar su máquina del tiempo, con la que quería viajar para conocer a sus admirados Bernoulli y Poisson. Repentinamente, sin saber cómo ni porqué la máquina explotó  . Desde ese momento, el doctor perdió la memoria, por ello debemos acudir en su ayuda para que pueda continuar con sus investigaciones ...

El Dr. Bacterio ha observado que una rata cualquiera situada en un laberinto en forma de T se dirige hacia el lado derecho con una probabilidad de 0'30. Si sabemos que pretende situar sucesivamente en la salida del laberinto a 7 ratas y que su conducta de recorrido es independiente en cada ensayo. Para las preguntas de 1 a 5, determina:

1. La probabilidad de que dos o menos ratas se dirijan al lado derecho

   a) $P(X \leq 2) = 0.647$ b) $P(X > 2) = 0.353$ c) $P(X < 2) = 0.329$ d) $P(X \geq 2) = 0.671$

2. La probabilidad de que ninguna se dirija al lado derecho

   a) $P(X = 0) = 0.08$ b) $P(X > 0) = 0.918$ c) $P(X > 1) = 0.671$ d) $P(X \geq 1) = 0.918$

3. La probabilidad de que ninguna se dirija al lado izquierdo

   a) $P(X = 7) = 0.0002187$ b) $P(X > 7) = 0$ c) $P(X < 7) = 0.999782$ d) $P(X \leq 7) = 1$

4. La probabilidad de que cuatro ratas vayan al lado derecho y tres al lado izquierdo

   a) $P(X \leq 4) = 0.971$ b) $P(X = 4) = 0.097$ c) $P(X \leq 3) = 0.87$ d) $P(X = 3) = 0.227$

5. El número esperado de ratas que vayan a la derecha

   a) 4.9 b) 7 c) 2.1 d) 0.3

Durante un experimento de laboratorio del Doctor Bacterio, el número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo es cuatro. Para las preguntas de 6 a 9, determina:

6. La probabilidad de que 6 partículas entren al contador en un milisegundo dado

   a) $P(X = 6) = 0.104196$ b) $P(X \leq 6) = 0.889$ c) $P(X \geq 6) = 0.215$ d) $P(X \neq 6) = 0.8958$

7. La probabilidad de que 1 partícula entre al contador en dos milisegundos

   a) $P(X = 1) = 0.0026837$ b) $P(X \leq 1) = 0.003$ c) $P(X \geq 1) = 0.999665$ d) $P(X \neq 1) = 0.99732$

8. La probabilidad de que al menos 3 partículas entren al contador en dos milisegundos

   a) $P(X = 3) = 0.0286$ b) $P(X \leq 3) = 0.042$ c) $P(X \geq 3) = 0.986$ d) $P(X \neq 3) = 0.9714$

9. La varianza de la variable $X =$ "número de partículas que pasan a través del contador en tres milisegundos"

   a) 3 b) 12 c) 4 d) 144

Según los archivos de una determinada población, una de cada diez mil personas tiene problemas de memoria como nuestro Doctor. En la rehabilitación de cada sujeto el Estado gasta 3000 €. Para las preguntas 10 y 11, si se selecciona una muestra aleatoria simple de 20.000 personas

10. ¿Cuál es la probabilidad de que el Estado tenga que invertir por lo menos 18.000 €?

    a) $P(X = 6) = 0.012$ b) $P(X \leq 6) = 0.995$ c) $P(X \geq 6) = 0.01656$ d) $P(X \neq 6) = 0.988$

11. ¿Cuál es la probabilidad de que el Estado tenga que invertir menos de 18.000 €?

    a) $P(X = 6) = 0.012$ b) $P(X \leq 6) = 0.995$ c) $P(X < 6) = 0.983$ d) $P(X \neq 6) = 0.988$

Cuestiones abiertas

1. La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque dada es 3/4.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan al menos dos de los siguientes 12 componentes que se prueben?
   (b) Si se prueban 100, ¿cuál es el número esperado de componentes "supervivientes"?
   (c) Si los componentes se empaquetan en paquetes de 4 unidades, y a su vez en cajas conteniendo 15 paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que elegida una caja al azar, todos los componentes sobrevivan?

2. El número de defectos en un rollo de tela de $40m^2$ es por término medio 1. Determina:
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún defecto en un rollo de 40 m^2?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya algún defecto en una pieza de 2 m^2?
   (c) Si seleccionamos 80 piezas de 2 m^2, ¿cuál es la probabilidad de que tengamos exactamente 6 piezas con defectos?
   (d) Si por una pieza de 2 m^2 defectuosa perdemos 5 €, ¿cuál es la probabilidad de que perdamos a lo sumo 15 € al considerar una muestra de 10 piezas?

SOLUCIONES de las cuestiones de autoevaluación del tema 4

Cuestiones V/F

1. V	2. F	3. F	4. F	5. V
6. V	7. V	8. V	9. F	10. V
11. F	12. F	13. V		

Cuestiones a completar

1. probabilidad	2. n, 2, éxito, fracaso, p, q, se mantienen constantes
3. discreta	4. Binomial, (n=4, p=1/6), $P(X \leq 2)$, 0.983797
5. medio, λ	6. 7.2, Binomial, (n=8,p=0.9), $P(X \geq 3)$, 0.999977, 1 - $P(X < 3)$
7. Poisson, grande, pequeña, $n \cdot p$	8. Poisson, 20, $P(X > 3)$, 0.999997, 1 - $P(X \leq 3)$, Poisson, 40

9. Binomial, (n=20,p=0.1), $P(X \leq 1)$, 0.391747 10. Uniforme discreta, Binomial, Poisson, Hipergeométrica, Multinomial, Geométrica, Binomial negativa

Cuestiones de elección múltiple

1. a) Binomial(7,0.3)	2. a)	3. a)	4. b)
5. c)	6. a) Poisson(4)	7. a) Poisson(8)	8. c)
9. b) Poisson(12)	10. c) Binomial(20000,0.0001) $\approx$ Poisson(2)	11. c)	

Cuestiones abiertas

1.

(a)

Primero debemos establecer cuál es la variable de interés. De acuerdo con la probabilidad pedida, la variable que nos interesa en este apartado es X = "número de componentes que sobreviven de 12 probados". Es razonable pensar que esta variable sigue una distribución Binomial, ya que cada componente es independiente de los otros y en cada prueba el componente *puede ("éxito")* o no sobrevivir. Por ello tendremos que $X \sim$ Binomial(12,0.75), es decir, X será Binomial con parámetros $n = 12$ (componentes probadas) y $p = 3/4 = 0.75$ (probabilidad de éxito, de sobrevivir). Antes de pasar a determinar la probabilidad pedida, pensemos que resultado esperamos obtener, por si el resultado obtenido no concuerda con nuestro razonamiento, realizar las comprobaciones oportunas. Como la probabilidad de éxito es alta y de 12 componentes nos piden la probabilidad de que al menos dos sobrevivan, es claro que la probabilidad pedida será muy cercana a 1. Ahora sí, pongámonos a calcularla.

Como nos piden la probabilidad de que sobrevivan al menos dos (dos o más), se tiene: $P(X \geq 2) =$ P(X = 2) + P(X = 3) + ... + P(X = 12). De esta manera deberíamos realizar muchos cálculos, para ahorrarnos tiempo podemos calcularla como:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = formulario$$

$$= 1 - (\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} 0.75^0 0.25^{12} + \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} 0.75^1 0.25^{11}) = calculadora$$

$$= 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0.0000000596 + 12 \cdot 0.75 \cdot 0,000000238) = 0.999998$$

(b)

Ahora la variable de interés será $X =$ "número de componentes que sobreviven de 100 probados". Por ello tendremos que $X \sim$ Binomial(100,0.75). En consecuencia, el número esperado de componentes que sobrevivan será : $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0.75 = 75$

(c)

Ahora la variable de interés será $X =$ "número de componentes que sobreviven de una caja". Una caja está formada por 15 paquetes cada uno con 4 componentes, es decir, de $4 \cdot 15 = 60$ componentes. La variable seguirá una Binomial(60,0.75). La probabilidad pedida (que será cercana a 0) es:

$$P(X = 60) = formulario = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \end{pmatrix} 0.75^{60} 0.25^0 = 1 \cdot 3.189 \cdot 10^{-8} \cdot 1 = 3.189 \cdot 10^{-8}$$

2.

(a)

Primero debemos establecer cuál es la variable de interés. De acuerdo con la probabilidad pedida, la variable que nos interesa en este apartado es $X =$ "número de defectos en un rollo de 40 m^2". Es razonable pensar que esta variable sigue una distribución Poisson (pues se ajusta a sus características, repásalas en los apuntes), de parámetro 1 (número medio de defectos en 40 m^2). La probabilidad pedida será:

$$P(X = 0) = formulario = \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} = e^{-1} = 0.367879$$

(b)

Ahora la variable de interés es $X =$ "número de defectos en una pieza de 2 m^2", que se distribuirá como Poisson de parámetro $2/40 = 0.05$. La probabilidad de que haya algún defecto (uno o más) será:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = formulario = 1 - \frac{e^{-0.05} \cdot 0.05^0}{0!} = 1 - e^{-0.05}$$

= 1 - 0.951229 = 0.048771

(c)

Ahora la variable de interés será X = "número de piezas con defectos de 80 piezas". Esta variable será Binomial, con parámetros $n = 80$ y probabilidad de éxito (ser defectuosa), $p = 0.048771$ (calculada en el apartado anterior). La probabilidad pedida es:

$$P(X = 6) = formulario = \begin{pmatrix} 80 \\ 6 \end{pmatrix} 0.049^6 0.951^{74}$$

Con algunas calculadoras podría obtenerse el resultado: 0.0999795. Sin embargo, también podríamos aproximar nuestra variable mediante una Poisson (así los cálculos también serán más cortos), ya que $n = 80$ es grande, $p = 0.048771$ es pequeña y $n \cdot p = 3.90168$ moderada. Usando la aproximación a Poisson (3.9), tendremos:

$$P(X = 6) = formulario = \frac{e^{-3.9} \cdot 3.9^6}{6!} = 0.0990146$$

Cuando no se pueda calcular el número combinatorio con la calculadora, necesariamente tendréis que recurrir a esta aproximación.

(d)

Ahora la variable de interés será X = "número de piezas con defectos de 10 piezas". Esta variable será Binomial, con parámetros $n = 10$ y probabilidad de éxito (ser defectuosa), $p = 0.048771$. Como pide la probabilidad de que a lo sumo perdamos 15 €, y por una pieza defectuosa perdemos 5 €, nos están pidiendo la probabilidad de que a lo sumo haya $15/5 = 3$ piezas defectuosas de las 10, o sea,

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = formulario$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0.049^0 0.951^{10} + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} 0.049^1 0.951^9 + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} 0.049^2 0.951^8 + \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} 0.049^3 0.951^7$$

$$= calculadora = 0.606528 + 0.310976 + 0.0717492 + 0.00980984 = 0.99906304$$

____________________ Nº aciertos de cuestiones Verdadero/Falso
____________________ Nº aciertos de cuestiones a completar
____________________ Nº aciertos de cuestiones elección múltiple
____________________ 13 puntos, si la cuestión abierta 1 es correcta
____________________ 13 puntos, si la cuestión abierta 2 es correcta
Suma = ____________________ **Puntuación final**

Si tu puntuación final está entre:

0 y 24: estás en peligro, acude urgentemente a tutorías
25 y 36: estás en el filo, te puedes cortar si no vas con cuidado
37 y 51: estás por el buen camino, sigue así
52 y 60: muy bien, eres un hacha