

Tema 3. Sucesos y probabilidad

Cuestiones de Verdadero/Falso

1. Un suceso es un subconjunto del espacio muestral.
2. La probabilidad de un suceso es una medida de la verosimilitud de que el suceso no ocurra.
3. La probabilidad de un suceso está siempre comprendida entre 0 y 1.
4. Si A es un suceso, $P(A) + P(A^c) = 1$
5. Si A y B son sucesos, se cumple siempre que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. Si A y B son sucesos, se cumple siempre que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
7. $P((A \cup B)^c) = P(A^c \cup B^c)$
8. $P(A|B) = P(A)/P(B)$
9. Si $P(A \cap B) = 0$, entonces los dos sucesos son independientes
10. El coeficiente de contingencia describe la asociación entre dos variables dispuestas en una tabla de contingencia
11. $P(A^c)$ es igual a $P(1 - A)$
12. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$
13. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

Cuestiones a completar

1. El conjunto de todos los posibles valores que puede adoptar un variable aleatoria es (la muestra, el espacio muestral, los puntos muestrales) _____
2. Si dos sucesos A y B son excluyentes o disjuntos, entonces $P(A \cap B)$ vale (0, 0.5, 1) _____
3. La suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales es siempre _____
4. La propiedad: $P((A \cap B)^c) = P(A^c \cup B^c)$, es consecuencia de (las leyes de DeMorgan, teorema de Bayes, teorema de la probabilidad total) _____
5. La intersección entre el suceso A y su suceso contrario o complementario es (\emptyset, S, A, A^c) _____, además la unión es (\emptyset, S, A, A^c) _____
6. Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B)$ es igual a $(0, P(A) \cdot P(B), P(A) + P(B))$ _____
7. Cuanto más cercano a $(0, 1, -1)$ _____ esté el coeficiente de contingencia, mayor será la relación entre las variables.

8. Cuanto más cercano a $(0, 1, -1)$ _____ esté el coeficiente de contingencia, menor será la relación entre las variables.
9. Si A es un suceso que se presenta siempre asociado a uno de los sucesos B_1, B_2, \dots, B_n mutuamente excluyentes en que se particiona el espacio muestral S . La siguiente ecuación

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A)}$$

corresponde al teorema de (la probabilidad total, Bayes) _____

10. Si $P(A|B) = P(A)$, entonces A y B son sucesos (independientes, dependientes, excluyentes)

11. Sean A y B dos sucesos. $P(A|B)$ denota la probabilidad de que ocurra (A dado B , B dado A , A y B , A o B)

Cuestiones de Elección Múltiple

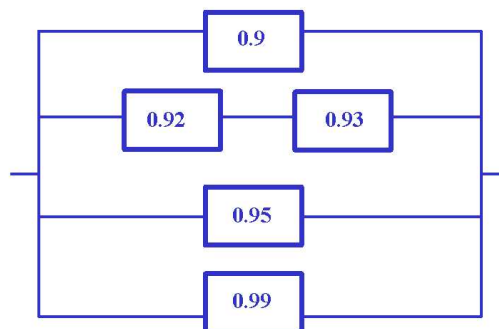
Hace muchos, muchos años, en un lugar muy, muy lejano, nuestro amigo Phileas Fogg se encontraba en pleno viaje alrededor del mundo. El inspector Fix iba tras él pisándole los talones. Para darle esquinazo, decide tomar un atajo y atravesar el apasionante país de *Estadistilandia*. En este país habitaba una tribu muy particular, que sólo permitía el paso de los viajeros que demostraran contar con unos mínimos conocimientos estadísticos, por ello en sus fronteras se realizaban minuciosos controles estadísticos. Mr. Fogg, que sabía de la ignorancia de Mr. Fix, se aventuró hacia la frontera de este cautivador país. En la frontera, el jefe de aduanas, llamado *Deaquí Nopasas*, planteó a nuestro amigo Phileas las cuestiones siguientes. Nosotros, expertos en esta materia, echémosle una mano, para que le permitan cruzar la frontera y ganar su apuesta.

1. Dado $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, y $P(A \cup B) = 0.8$, entonces $P(A|B)$ vale:
a) 0.5 b) 0.75 c) 0.625 d) 0.048
2. Si $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$, y $P(A | B) = 0.4$, entonces $P(A \cup B)$ vale:
a) 0.12 b) 0.9 c) 0.78 d) 0.24
3. Si $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$, y $P(A | B) = 0.9$, entonces $P(B|A)$ vale:
a) 0.45 b) 0.36 c) 0.556 d) 0.72
4. Si A y B son sucesos excluyentes, con $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.7$, entonces $P(A \cup B)$ vale:
a) 0.2143 b) 0.85 c) 0.098 d) 0.55
5. Si A y B son sucesos independientes, con $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.7$, entonces $P(A \cap B)$ vale:
a) 0.55 b) 0.2143 c) 0.105 d) 0.85
6. Si A y B son sucesos independientes, con $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.6$, entonces $P(A | B)$ vale:
a) 0.6 b) 0.35 c) 0.21 d) 0.5833
7. Si A y B son sucesos independientes, con $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.4$, entonces $P(A \cup B)$ vale:
a) 0.55 b) 0.375 c) 0.06 d) 0.49

8. Si A y B son sucesos excluyentes, con $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.4$, entonces $P(A \cap B^c)$ vale:
 a) 0.85 b) 0.15 c) 0.4 d) 0.6
9. Si A y B son sucesos excluyentes, con $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.7$, entonces $P(A \cup B)$ vale:
 a) 0.2143 b) 0.85 c) 0.098 d) 0.55
10. Si $P(A^c \cup B^c \cup C^c) = 0.4$, entonces $P(A \cap B \cap C)$ vale:
 a) 0.6 b) 0.4 c) 0.5 d) 0.1
11. Si $P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 0.4$, entonces $P(A \cup B \cup C)$ vale:
 a) 0.6 b) 0.4 c) 0.5 d) 0.1
12. $P(A^c|B)$ es igual a:
 a) $1 - P(A|B)$ b) $P(1 - A|B)$ c) $P(A^c)$ d) $1 - P(A|B^c)$
13. $P(A|B^c)$ es igual a:
 a) $1 - P(A|B)$ b) $1 - P(A|B^c)$ c) $P(A^c|B^c)$ d) $1 - P(A^c|B^c)$

Cuestiones abiertas

1. El 30% de los usuarios de servicios de telecomunicaciones móviles corresponden al operador *ML* ("Más libre") y el 20% corresponde al operador *MA* ("Más amigos"). El porcentaje de clientes del operador *ML* que utilizan tecnología wap es del 10%, para el operador *MA* es del 15%, mientras que para el resto de competidores los usuarios de dicha tecnología corresponden al 5%.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que los usuarios de servicios de telecomunicaciones móviles usen tecnología wap?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que elegido un cliente al azar y sabiendo que su móvil no es de tecnología wap, corresponda al resto de operadores?
2. El circuito siguiente trabaja sólo si existe una trayectoria de dispositivos en funcionamiento, de izquierda a derecha. La probabilidad de que cada dispositivo funcione, aparece en la figura. Supongamos que los dispositivos fallan de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito trabaje?



3. Desea determinarse si la cantidad de ingresos está relacionada con la última marca comprada de cierto producto. Por ello, se analizó una muestra de 800 clientes, cuya información aparece en la tabla siguiente:

Ingresos	Marca		
	M1 = "Marca 1"	M2 = "Marca 2"	M3 = "Marca 3"
B = "Bajos"	50	125	75
M = "Medios"	125	65	190
A = "Altos"	75	45	50

En base a esta tabla, si uno de dichos clientes fuera seleccionado al azar, calcula las siguientes probabilidades: $P(B)$, $P(M2)$, $P(B|M2)$, $P(B \cup M2)$, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ingresos bajos o que no comprara la marca M2?.

¿Los sucesos B y M2 son independientes? Calcula también el coeficiente de contingencia e interprétalo.

SOLUCIONES de las cuestiones de autoevaluación del tema 3

Cuestiones V/F

1. V 2. F 3. V 4. V 5. F
 6. F 7. F 8. F 9. F 10. V
 11. F* 12. F* 13. F*

* : $P(A)$ indica la probabilidad de que se dé el suceso A. P significa probabilidad y dentro del paréntesis ÚNICAMENTE pueden haber sucesos (subconjuntos). $P(A)$ es un número (entre 0 y 1), A es un suceso (un subconjunto del espacio muestral).

Cuestiones a completar

1. espacio muestral 2. 0 3. 1
 4. leyes de DeMorgan 5. \emptyset ; S 6. $P(A) \cdot P(B)$
 7. 1 8. 0 9. Bayes
 10. independientes 11. A dado B

Cuestiones de elección múltiple

1. a) 2. c) 3. d) 4. b) 5. c) 6. b)
 7. d) 8. b) 9. b) 10. a) 11. a) 12. a)
 13. d)

Cuestiones abiertas

1.

Tras leer cuidadosamente el enunciado, primeramente daremos nombre a los sucesos de interés y extraeremos la información contenida en el enunciado:

ML = ser usuario de "Más libre", $P(ML) = 0.3$

MA = ser usuario de "Más amigos", $P(MA) = 0.2$

R = ser usuario del resto de operadores, $P(R) = 1 - P(R^c) = 1 - P(ML) - P(MA) = 1 - 0.3 - 0.2 = 0.5$

W = utiliza tecnología wap, $P(W|ML) = 0.1$, $P(W|MA) = 0.15$, $P(W|R) = 0.05$

(a) Usaremos el teorema de la probabilidad total

$$P(W) = P(W|ML) \cdot P(ML) + P(W|MA) \cdot P(MA) + P(W|R) \cdot P(R) = 0.1 \cdot 0.3 + 0.15 \cdot 0.2 + 0.05 \cdot 0.5 = 0.085$$

(b) Usaremos el teorema de Bayes

$$P(R|W^c) = \frac{P(R) \cdot P(W^c|R)}{P(W^c)} = \frac{0.5 \cdot (1 - 0.05)}{1 - 0.085} = \frac{0.475}{0.915} = 0.519$$

2.

Denotaremos A_1 = "funciona la componente 1", A_2 = "funciona la componente 2", A_3 = "funciona la componente 3", A_4 = "funciona la componente 4", A_5 = "funciona la componente 5".

Estos sucesos tienen probabilidades:

$$P(A_1) = 0.9, P(A_2) = 0.92, P(A_3) = 0.93, P(A_4) = 0.95, P(A_5) = 0.99.$$

Por la disposición del sistema, la probabilidad de que el circuito funcione será:

$$P(A_1 \cup (A_2 \cap A_3) \cup A_4 \cup A_5)$$

Para calcular esta probabilidad, transformaremos las uniones en intersecciones, pues de esta manera se facilitará el cálculo (limitándonos a realizar productos).

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup (A_2 \cap A_3) \cup A_4 \cup A_5) &= \text{suceso contrario} = 1 - P((A_1 \cup (A_2 \cap A_3) \cup A_4 \cup A_5)^c) = \text{leyes de} \\ &\text{DeMorgan} = 1 - P(A_1^c \cap (A_2 \cap A_3)^c \cap A_4^c \cap A_5^c) = \text{independencia} = 1 - P(A_1^c) \cdot P((A_2 \cap A_3)^c) \cdot P(A_4^c) \cdot \\ &P(A_5^c) = 1 - P(A_1^c) \cdot (1 - P(A_2 \cap A_3)) \cdot P(A_4^c) \cdot P(A_5^c) = 1 - (1 - 0.9) \cdot (1 - 0.92 \cdot 0.93) \cdot (1 - 0.95) \cdot (1 - \\ &0.99) = 1 - 0.1 \cdot 0.1444 \cdot 0.05 \cdot 0.01 = 0.99999278 \end{aligned}$$

3.

$$P(B) = 250/800 = 0.3125$$

$$P(M2) = 235/800 = 0.29375$$

$$P(B|M2) = 125/235 = 0.532$$

$$P(B \cup M2) = P(B) + P(M2) - P(B \cap M2) = 250/800 + 235/800 - 125/800 = 0.45$$

$$P(B^c \cup M2^c) = \text{leyes de DeMorgan} = P((B \cap M2)^c) = \text{suceso contrario} = 1 - P(B \cap M2) = 1 - 125/800 = 0.84375$$

B y M2 no son independientes porque $P(B) = 0.3125$ es distinta de $P(B|M2) = 0.532$

El coeficiente de contingencia lo calcularemos de la siguiente forma:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}}$$

$$\begin{aligned} \chi^2 = & \frac{(50 - 250 \cdot 250/800)^2}{250 \cdot 250/800} + \frac{(125 - 250 \cdot 235/800)^2}{250 \cdot 235/800} + \frac{(75 - 250 \cdot 315/800)^2}{250 \cdot 315/800} \\ & + \frac{(125 - 380 \cdot 250/800)^2}{380 \cdot 250/800} + \frac{(65 - 380 \cdot 235/800)^2}{380 \cdot 235/800} + \frac{(190 - 380 \cdot 315/800)^2}{380 \cdot 315/800} \\ & + \frac{(75 - 170 \cdot 250/800)^2}{170 \cdot 250/800} + \frac{(45 - 170 \cdot 235/800)^2}{170 \cdot 235/800} + \frac{(50 - 170 \cdot 315/800)^2}{170 \cdot 315/800} = 96,39 \end{aligned}$$

$$C = \sqrt{\frac{96.39}{800 + 96.39}} = 0,3279$$

De momento diremos que ambas variables están relacionadas, en el tema 6 ya veremos cómo determinar si las variables son o no independientes.

	_____	Nº aciertos de cuestiones Verdadero/Falso
	_____	Nº aciertos de cuestiones a completar
	_____	Nº aciertos de cuestiones elección múltiple
	_____	13 puntos, si la cuestión abierta 1 es correcta
	_____	12 puntos, si la cuestión abierta 2 es correcta
	_____	13 puntos, si la cuestión abierta 3 es correcta
Suma =	_____	Puntuación final

Si tu puntuación final está entre:

- 0 y 30: estás en peligro, acude urgentemente a tutorías
- 31 y 45: estás en el filo, te puedes cortar si no vas con cuidado
- 46 y 63: estás por el buen camino, sigue así
- 64 y 75: muy bien, eres un hacha