PROBLEMES TEMA 4

Exemple Es trauen 3 boles, de forma consecutiva, d'una caixa on hi ha tres boles blaves i cinc verdes. La variable aleatòria X és el nombre de boles verdes extretes. Trobeu la distribució de probabilitat de X, així com la seua esperança i variància en cada cas:

1. Després de traure una bola, aquesta es torna a ficar a la caixa.
2. Les boles no es retornen a la caixa.

1. Espai mostral, S={0,1,2,3}
   $P(X=0)=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{27}{512}$
   $P(X=1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot 3=\frac{135}{512}$
   $P(X=2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot 3=\frac{225}{512}$
   $P(X=3)=\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{125}{512}$
   E(X)= $0\cdot\frac{27}{512}+1\cdot\frac{135}{512}+2\cdot\frac{225}{512}+3\cdot\frac{125}{512}=1.875$
   E(X^2) $=0^2\cdot\frac{27}{512}+1^2\cdot\frac{135}{512}+2^2\cdot\frac{225}{512}+3^2\cdot\frac{125}{512}=4.21875$
   V(X) = E(X^2) - $E(X)^2$ = 4.21875 - 1.875^2 = 0.703125
2. Espai mostral, S={0,1,2,3}
   $P(X=0)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$
   $P(X=1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot 3=\frac{15}{56}$
   $P(X=2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot 3=\frac{30}{56}$
   $P(X=3)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{10}{56}$
   E(X)= $0\cdot\frac{1}{56}+1\cdot\frac{15}{56}+2\cdot\frac{30}{56}+3\cdot\frac{10}{56}=1.875$
   E(X^2) $=0^2\cdot\frac{1}{56}+1^2\cdot\frac{15}{56}+2^2\cdot\frac{30}{56}+3^2\cdot\frac{10}{56}=4.0179$
   V(X) = E(X^2) - $E(X)^2$ = 4.0179 - 1.875^2 = 0.5022

1. Siga la variable aleatòria X amb funció de probabilitat:

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	0.25	0.5	0.25

   Calcular: E(Z), Var(Z), E(W), Var(W), Cov(Z,W) a partir de les següents variables aleatòries: Y = X^2, S = X + 2, Z = X + Y + S, W = X + 2Y + S

   (Sol. : 2.5, 2.25, 3, 3, 2.5)

2. La següent taula conté la funció de probabilitat conjunta de les reparacions que necessita un motor (Y), en funció dels mesos que està funcionant (X):

   (a) Calcular la quantitat mitjana de reparacions del motor i el nombre de mesos que està funcionant amb més probabilitat

X \ Y	10	12	14	16
11	0.04	0.09	0.05	0.02
12	0.04	0.1	0.1	0.11
13	0.02	0.04	0.1	0.29

   (b) Calcular les probabilitats: P(X = 12, Y $\leq$ 14), P(Y < 12), P(X > 11), P(X $\leq$ 12, Y > 12)

   (c) Calcular la covariància entre les dos variables

   (d) Són les dues variables independents?

   (Sol. : 13.98, 13 (0.45); 0.24, 0.1, 0.8, 0.28; 0.725; No)

3. En certa empresa fustera s'estudiaren les variables: X = edat del tronc i Y = grau de la flexibilitat de la fusta. Amb certes dades es va construir la següent distribució conjunta:

Y \ X	1	3	5	7	9	13
4	0.05	0	0.05	0.1	0.07	0.08
6	0.05	0.05	0.02	0	0.06	0.02
9	0.1	0.1	0.03	0	0.02	0.01
15	0.05	0	0.08	0.06	0	0

   (a) Calcular les distribucions marginals de cada variable i les seues mitjanes

   (b) Calcular la probabilitat que un arbre tinga grau de flexibilitat 6 i tinga més de 3 anys

   (c) Calcular la probabilitat que un arbre tinga grau de flexibilitat major que 6

   (d) Calcular la probabilitat que un arbre tinga menys de 7 anys

   (e) Calcular la probabilitat que un arbre tinga grau de flexibilitat menor o igual que 9 i tinga més de 5 anys

   (f) Quin grau de flexibilitat és el més probable?

   (g) Són independents?

   (Sol. : X: p(1)= 0.25, p(3) = 0.15, p(5) = 0.18, p(7) = 0.16, p(9) = 0.15, p(13) = 0.11; Y: p(4)= 0.35, p(6) = 0.2, p(9) = 0.26, p(15) = 0.19, E(Y) = 7.79, E(X) = 5.5; 0.1; 0.45; 0.58; 0.36; 4 (0.35); No)

4. Siga X una variable aleatòria. Determinar el valor de k per tal que la següent funció siga una funció de probabilitat:

x_i	-1	1	3
$f(x_i)$	0.6	k	0.1

   (a) Calcular E(X) i Var(X)

(b) Si Y = X^2 - 1, calcular E(Y) i Var(Y)

(c) Si Z= 2^X, calcular E(Z)

(Sol. : k=0.3; 0, 1.8; 0.8, 5.76; 1.7)

5. Suposem que la qualificació d'una persona en un cert test es comporta com una variable aleatòria amb funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} x + 0.5 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en la resta} \end{cases}$$

Determinar la funció de distribució, la qualificació mitjana i la probabilitat que la persona supere el test.

(Sol. : F(x) = $\{$ *0 si* $x < 0$*;* $\frac{x^2}{2} + 0.5x$ *si* $x \in [0,1]$*; 1 si* $x > 1\}$*, 0.5833, 0.625)*

6. Siga X una variable aleatòria continua. Determinar c per tal que la següent funció siga una funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} c + x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en la resta} \end{cases}$$

(a) Calcular E(X) i Var(X)

(b) Calcular la funció de distribució de la variable

(c) Determinar: P(X < 2), P(1 ≤ X ≤ 2), P(X > 1)

(Sol. : c = 1/9; 2.25, 0.3375; F(x) = $\{$ *0 si* $x < 0$*;* $\frac{x^3}{27}$ *si* $x \in [0,3]$*; 1 si* $x > 3\}$*; 0.2963, 0.259, 0.963)*

7. Donada la funció de distribució:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

(a) Calcular: P(X ≤ 0.2), P(X > 0.6), P(0.3 < X ≤ 0.6)

(b) Determinar la funció de densitat, E(X) i Var(X)

(Sol. 0.008, 0.784, 0.189; f(x) = $\{ 3x^2$ *si* $x \in [0,1]$*; 0 en altre cas*$\}$*; 0.75, 0.0375)*

8. En una ruleta americana n'hi ha 18 quadrats amb nombres parells i 18 quadrats amb nombres senars i dos quadrats més amb els nombres 0 i 00. Per tal d'escollir un dels quadrats a l'atzar, es fa rodar una bola per damunt d'un plat giratori fins que es deté. Si apostes un euro a parell, recuperes l'euro apostat més altre extra si ix un quadrat parell, és a dir, guanyes 1 euro; si en canvi ix senar o un dels zeros, perds l'euro apostat i per tant el guany és -1.

(a) Si X és el guany en una partida, escriu els possibles valors de X i les seues probabilitats.

(b) Troba el guany esperat en una partida

(c) Quin és el guany esperat en 100 partides? I en 1000 partides? I en 10000 partides?

(Sol: p(-1)= 20/38, p(1)=18/38; -1/19 ≈ -0.052632; -5.26, -52.63, -526.32)

9. En un joc anomenat 'chuck-a-luck' (llança una sort) es llancen 3 daus. Apostes sobre un dels nombres, per exemple apostes un euro al 6. Si en llançar els 3 daus, no ix cap 6, perds l'euro. Si ix algun 6, recuperes l'euro i un euro extra per cada 6 que ix. Si anomenem X el guany en una partida, X valdrà -1 si no ix cap 6 i serà 1, 2 o 3 depenent del nombre de 6's que ixen.

(a) Troba la funció de probabilitat de X.

(b) Calcula E(X)

(c) Què esperes guanyar si apostes un euro al 6, 1000 voltes?

(Sol: p(-1) = 125/216, p(1) = 75/216, p(2) = 15/216, p(3) = 1/216 ; -17/216 ≈ -0.0787; -78.7)

10. **E(X) no sempre representa un valor típic de X.** Suposem que els possibles valors de X són 1, 2 i 1000, amb probabilitats 1/4, 1/2, 1/4 respectivament. Trobar E(X). (Nota que E(X) no és el valor més probable de X, ni tan sols proper a qualsevol valor possible de X. Si fem la mitjana de moltes observacions de X, aleshores la mitjana estarà prop de E(X)).

E(X) no és sempre un valor mig de la distribució. Siga X una variable amb funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en la resta} \end{cases}$$

Quina és la probabilitat que X siga major que E(X)? (no és 1/2 !)

Troba el nombre m per al qual P(X > m) = 1/2 (és la mediana de X)

(Sol: 251.25; E(X) = 1 , 1/e = 0.3679, ln 2 = 0.693)