

PROBLEMES TEMA 3

**Exemple** En una fàbrica el 80 % de gerres de cristall el produeix la màquina 1 i el 20 % la màquina 2. Una gerra és defectuosa si té bombolles d'aire o algun cos estrany o ambdues coses. Aquests defectes ocorren independentment l'un de l'altre. El 5 % de la producció de la màquina 1 té bombolles d'aire i el 2 % té algun cos estrany. El 1 % de la producció de la màquina 2 té bombolles d'aire i el 3 % té algun cos estrany.

- Quina és la probabilitat que una gerra fabricada per la màquina 1 siga defectuosa?
- Es prenen 10 gerres fabricades per la màquina 1: quina és la probabilitat que cap d'elles siga defectuosa?
- Quin percentatge de la producció total de gerres serà defectuosa?
- Si una gerra té bombolles d'aire però cap cos estrany, quina és la probabilitat que haja sigut fabricada per la màquina 1?

"gerra fabricada per Màquina 1" =  $M_1$ , "gerra fabricada per Màquina 2" =  $M_2$ , "gerra amb bombolles" =  $B$ , "gerra amb algun cos estrany" =  $C$ , "gerra defectuosa" =  $D$  ( $B \cup C = D$ ,  $B$  i  $C$  independents)  $P(M_1)=0.8$ ,  $P(M_2)=0.2$ ,  $P(B|M_1)=0.05$ ,  $P(B|M_2)=0.01$ ,  $P(C|M_1)=0.02$ ,  $P(C|M_2)=0.03$

- $P(D|M_1) = P(B \cup C | M_1) = P(B|M_1) + P(C|M_1) - P(B \cap C | M_1) = P(B|M_1) + P(C|M_1) - P(B|M_1) \cdot P(C|M_1) = 0.05 + 0.02 - 0.05 \cdot 0.02 = 0.069$
- $P(D^c|M_1) = 1 - P(D|M_1) = 1 - 0.069$  (probabilitat que una gerra fabricada per la màquina 1 no siga defectuosa)

$$P(10 \text{ gerres de } M_1 \text{ no siguen defectuoses}) = (1 - 0.069)^{10}$$

- Pel teorema de la probabilitat total:  $P(D) = P(D|M_1)P(M_1) + P(D|M_2)P(M_2)$   
 $P(D|M_2) = P(B \cup C | M_2) = P(B|M_2) + P(C|M_2) - P(B \cap C | M_2) = P(B|M_2) + P(C|M_2) - P(B|M_2) \cdot P(C|M_2) = 0.01 + 0.03 - 0.01 \cdot 0.03 = 0.0397$   
 $P(D) = P(D|M_1)P(M_1) + P(D|M_2)P(M_2) = 0.069 \cdot 0.8 + 0.0397 \cdot 0.2 = 0.0552 + 0.00794 = 0.06314$ . El 6.314 % són defectuoses

$$4. P(M_1 | B \cap C^c) = \frac{P(M_1 \cap B \cap C^c)}{P(B \cap C^c)} = \frac{P(B \cap C^c | M_1)P(M_1)}{P(B) \cdot P(C^c)} = \frac{P(B|M_1) \cdot P(C^c|M_1)P(M_1)}{P(B) \cdot P(C^c)}$$

$$P(B) = P(B|M_1)P(M_1) + P(B|M_2)P(M_2) = 0.05 \cdot 0.8 + 0.01 \cdot 0.2 = 0.042$$

$$P(C) = P(C|M_1)P(M_1) + P(C|M_2)P(M_2) = 0.02 \cdot 0.8 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.022$$

$$P(C^c) = 1 - P(C) = 0.978$$

$$P(C^c | M_1) = 1 - P(C | M_1) = 1 - 0.02 = 0.98$$

$$P(M_1 | B \cap C^c) = \frac{0.05 \cdot 0.98 \cdot 0.8}{0.042 \cdot 0.978} = \frac{0.0392}{0.04108} = 0.9543$$

- La probabilitat que un cinturó de seguretat defectuós siga identificat com a tal en un control de qualitat és de 0.995, mentre que la probabilitat que un cinturó en perfectes condicions siga identificat com defectuós pel sistema de control és 0.001. Se sap que el procés de fabricació resulta, en promedi, a un cinturó defectuós per cada 500 fabricats. Determinar:

- La probabilitat que un cinturó identificat pel control com defectuós ho siga realment.
- La probabilitat que no siga defectuós un cinturó que passe el control.
- La màxima proporció de cinturons defectuosos fabricats que permetria que la probabilitat que un cinturó que passe el control no siga defectuós siga, almenys, 0.999.

$$(Sol. : 0.666, 0.99999, 0.501003) \quad 0.1667$$

- L'examen teòric de conduir és un test amb 4 possibles respostes per pregunta. Es suposa que l'aspirant a conductor/a coneix la resposta correcta amb probabilitat 0.6 i per tant, marca una resposta al atzar amb probabilitat  $1 - 0.6$ . Determinar la probabilitat que haja contestat al atzar, sabent que la seua resposta ha sigut correcta.

$$(Sol. : 0.1429)$$

- En la loteria primitiva cada joc consisteix en escollir 6 nombres de l'1 al 49. El dia del sorteig s'obtenen els sis nombres guanyadors més altre nombre conegut com el complementari. Obtenen el primer premi aquelles butlletes el sis nombres de les quals coincideixen amb els sis nombres guanyadors, i obtenen el segon premi si cinc dels nombres de la butlleta són nombres guanyadors i l'altre coincideix amb el complementari. Calcular les probabilitats d'obtenir el primer i el segon premi si juguem una butlleta de la loteria primitiva.

$$(Sol. : 7.15 \cdot 10^{-8}, 4.29 \cdot 10^{-7})$$

- En un grup de 10 persones, quina és la probabilitat que cadascuna d'elles complisca els anys en un dia diferent de l'any? I quina és la probabilitat que almenys dos persones complisquen els anys el mateix dia?

$$(Sol. : 0.883, 0.117)$$

- El 5% de les unitats produïdes en una fàbrica són defectuoses quan el procés de fabricació es troba controlat. Si el procés es troba fora de control, es produeixen un 30% d'unitats defectuoses. La probabilitat que el procés es trobe controlat és de 0.92. Si escollim al atzar una unitat i resulta que és defectuosa. Quina és la probabilitat de que el procés es trobe controlat?

$$(Sol. : 0.657)$$

- Una planta armadora rep circuits provinents de tres fabricants:  $A$ ,  $B$ , i  $C$ . El 50% del total el compra a  $A$ , el 25% a  $B$  i l'altre 25% a  $C$ . El percentatge de circuits defectuosos per a  $A$ ,  $B$ , i  $C$  són respectivament: 5, 10 i 12 %. Si els circuits s'emmagatzemen en la planta sense importar la procedència:

- Determinar la probabilitat que una unitat armada de la planta continga un circuit defectuós.
- Si un circuit no és defectuós. Quina és la probabilitat que haja estat venut per  $B$ ?

(Sol. : 0.08, 0.245)

7. D'una baralla amb 40 cartes s'extrauen dues. Quina és la probabilitat que ambdues siguin as? I que alguna almenys siga as (complementari de cap d'elles és as)?

(Sol. : ~~0.0769~~, 0.1923)      0.00769

8. Un test per a la detecció de defectes en la fabricació d'unes peces té un 2% de falsos positius (el test respon que hi ha defectes quan en realitat no n'hi ha) i un 3% de falsos negatius (el test respon que no hi ha defectes quan en realitat sí n'hi ha). Si es fabrica una peça defectuosa per cada 100 fabricades, quina seria la probabilitat que una peça que ha donat positiu en el test fora realment defectuosa.

(Sol. : 0.3288)

9. Jurassic Petroleum ha classificat els sòls en tres tipus (A, B i C), segons les possibilitats de descobrir-hi petroli. La companyia perfora un pou en un lloc, que té probabilitats 0.35, 0.55 i 0.10 de pertànyer a cadascú dels tres tipus de sòl, respectivament. D'acord amb l'experiència, hi ha petroli en un 40% de perforacions en el sòl A, en un 25% de perforacions en el sòl B i en un 30% de perforacions en sòl C. Si no hi ha petroli al pou perforat, quina és la probabilitat que el pou es trobe en un sòl B?

(Sol. : 0.5957)

10. L'administració d'un país colonitzat fa un referèndum sobre la instal·lació de míssils estrangers al seu territori. A l'eixida d'un col·legi electoral, una empresa de sondeigs demana (anònimament) als votants què han votat. Se sap d'altres referèndums semblants que si un votant ha votat 'no' contesta la veritat en un 40% dels casos, mentre que si ha votat 'sí' contesta la veritat en un 95% dels casos. En fer l'escrutini del col·legi, es veu que hi ha un 70% de vots negatius. Si un votant ha contestat 'no' a l'empresa de sondeigs, quina és la probabilitat que haja votat 'no'?

(Sol. : 0.949)